

CC. 05656..

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
UNION - DISCIPLINE - TRAVAIL

ANNEE ACADEMIQUE 2006-2007

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



THESE UNIQUE

de Mathématiques

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES

Spécialité :

MECANIQUE ET ENERGETIQUE

THEME :

CALCUL DES COURANTS ET DES
MARTRES DANS LA ILAGUNE

Présentée par :

M. Serge Kouassi Kouassi YANGA

Directeur : Prof. Emile DANHO Maître de Conférence

THESE DE DOCTORAT.

-

Spécialité : Mécanique et Energétique

-

Sujet de la Thèse :

-

CALCUL DE COURANTS ET DE MAREES
DANS LA LAGUNE

-

Présenté par : Serge Kouassi Kouassi YANGA

Université de Cocody
UFR Mathématiques Informatique
Laboratoire de Mécanique et Energétique

-

Travaux effectués au Laboratoire de Mécanique et énergétique
de l'UFR MI de l'Université de Cocody-Abidjan

Table des matières

REMERCIEMENTS	4
DEFINITION DES NOTATIONS	5
INTRODUCTION	7
I PRESENTATION DES PHENOMENES DE MAREES ET DE COURANTS	10
1 Définition des mots clés du sujet	11
1.1 Les lagunes	11
1.2 Les courants	11
1.3 Les marées	12
1.4 La hauteur de marée	12
1.5 Origines des courants et des marées	12
1.5.1 Les courants	12
1.5.2 Les marées	13
1.5.3 Mesure des courants	18
1.5.4 Observation des marées	18
2 Présentation du système lagunaire Ebrié	19
2.1 Situation géographique	19
2.2 Morphologie	20
2.3 Climat	22
2.3.1 Saison	22
2.3.2 Température, hygrométrie, insolation	22
2.4 Hydrographie	23
II MODELISATION DES PHENOMENES DE MAREES	

TABLE DES MATIÈRES

ET DE COURANTS	26
3 Modèle hydrodynamique	27
3.1 Position du problème	28
3.2 Analyse dimensionnelle	34
4 Equations de Saint-Venant	40
4.1 Hypothèses	40
4.2 Intégration sur la verticale	40
4.3 Règle de Leibnitz	41
5 Modélisation de la turbulence	45
5.1 Contrainte de cisaillement due au vent à la surface de l'eau et frotte- ment au fond	47
5.1.1 Modèle de frottement au fond de l'eau	50
5.1.2 Modèle de frottement à la surface de l'eau	51
5.2 Modélisation des termes de dispersion	52
 III RESOLUTION NUMERIQUE	 56
6 Résolution numérique des équations de Saint-Venant en 2D par la méthode des éléments finis	57
6.1 Généralités	57
6.2 Les principales étapes de la méthode	58
6.2.1 Discrétisation du problème	58
6.2.2 Formulation intégrale	65
6.2.3 Forme matricielle	70
6.3 Schémas numériques	70
6.3.1 Méthode de Runge-Kutta	71
6.3.2 Méthode de Prédiction-Correction	71
6.4 Discrétisation temporelle	72
6.5 Hypothèses de calcul	72
6.6 Mode opératoire	72
6.7 Présentation et analyse des résultats	73
6.7.1 Résultats relatifs à la marée	73
6.7.2 Résultats relatifs aux courants	90
 CONCLUSION PARTIELLE	 135

TABLE DES MATIÈRES

7	Condition de Radiation Pour le Canal de Vridi à Abidjan, Côte d'Ivoire	136
7.1	Introduction	138
7.2	Modèle hydrodynamique	138
7.2.1	Equations dynamiques	138
7.2.2	Conditions aux limites	139
7.3	Résolution numérique	143
7.3.1	Maillage du canal	143
7.3.2	Discrétisation des équations et des conditions aux limites . . .	143
7.3.3	Justification de l'utilisation d'un modèle linéaire plutôt que non linéaire	145
7.3.4	Résultats de la simulation	146
7.4	Conclusion	147
7.5	Bibliographie	148
	CONCLUSION GENERALE	151
	ANNEXES	154
	BIBLIOGRAPHIE	159

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à remercier le Professeur E. DANHO Maître de Conférence à l'Unité de Formation et Recherche en Mathématiques et Informatique (UFR MI) de l'Université de Cocody-Abidjan, qui a bien voulu m'encadrer et diriger cette thèse et pour les sages conseils qu'il m'a prodigués.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit du Directeur de l'UFR MI, le Professeur KOUA Konin et du Directeur du Laboratoire de Mécanique et Energétique qui ont permis que cette thèse se fasse dans de bonnes conditions.

Je remercie aussi Docteur SANGARE Mousatapha de l'INPHB, pour son apport appréciable dans le domaine numérique et ses remarques enrichissantes, ainsi que Docteur RANDRIANANDRASANA Florentin de l'UFR MI pour ses conseils.

Je remercie l'ensemble des enseignants de l'UFR MI et tous les amis du troisième cycle pour leur soutien.

Je veux exprimer ma gratitude envers tous les travailleurs du Département des Etudes Maritimes du Port Autonome d'Abidjan, qui ont mis à ma disposition les informations et les données dont ils disposaient.

Je veux aussi dire merci à ma femme et mes enfants qui ont été un soutien constant, à ma grande soeur, ainsi qu'à mon père, à ma mère et à toute ma famille.

DEFINITION DES NOTATIONS

η	dénivellation
h	côte du fond par rapport à un niveau de référence
$H = h + \eta$	hauteur d'eau totale
$\mathbf{u} = (u, v, w)$	vitesse tridimensionnelle
$\mathbf{f} = (fv, -fu, 0)$	force de Coriolis
Γ_r	accélération relative
Γ_c	accélération de Coriolis
Γ_e	accélération d'entraînement
Γ_1	frontière solide
Γ_2	frontière liquide
τ_{ij}	tenseur modélisant la turbulence et les effets visqueux
$f = 2\Omega_s \sin \lambda$	coefficient de Coriolis
$\Omega_s = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$	fréquence angulaire de la rotation de la terre
$\Omega_s = 7.5 \cdot 10^{-5} \text{rad.s}^{-1}$	
λ	latitude du domaine d'étude
$R_0 = \frac{U_0}{L}$	nombre de Rossby
$E_V = \frac{Av_0}{2\Omega_s D^2}$	nombre d'Ekman vertical
$E_H = \frac{A_H u_0}{2\Omega_s L^2}$	nombre d'Ekman horizontal
$E = E_V = E_H$	nombre d'Ekman
$\delta = \frac{D}{L}$	rapport d'aspect
P	pression à la côte z
P_a	pression à la surface
g	accélération de la gravité (accélération apparente)
g_0	accélération de la pesanteur (accélération absolue)
l_m	longueur de mélange
$\mathbf{U} = (U, V)$	vitesse horizontale moyennée

TABLE DES MATIÈRES

$\mathbf{Q} = (UH, VH)$	débit unitaire
$\mathbf{F} = (fVH, -fUH)$	effet de Coriolis
$\tau_s = (\tau_{sx}, \tau_{sy})$	contrainte exercée par le vent sur la surface libre
$\tau_b = (\tau_{bx}, \tau_{by})$	cisaillement au fond (frottement)
A_H	diffusion horizontale (turbulente)
A_V	diffusion verticale (turbulente)
ρ	masse volumique de l'eau
ρ_r	masse volumique de référence de l'eau
$\Delta\rho$	écart à la masse volumique de référence de l'eau
C_h	coefficient de Chézy (rugosité)
C_f	coefficient de Darcy (de frottement)
K_s	coefficient de rugosité de Strickler
n	coefficient de rugosité de Manning
R_h	rayon hydraulique
$\langle \tau_{ij} \rangle$	tenseur turbulent moyenné sur la verticale
$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$	dérivée particulaire
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	gradient en 3D
$\nabla_h = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$	gradient dans le plan moyenné
K	énergie cinétique de la turbulence
ϵ	taux de dissipation d'énergie
R_{ij}	tenseur de Reynold
$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	symbole de Kronecker
$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk = \{123\} \\ -1 & \text{si } ijk = \{231\} \\ 0 & \text{si 2 indices égaux} \end{cases}$	tenseur d'ordre 3
β	coefficient de correction d'advection
\mathbf{a}	vecteur issu du maillage
\mathbf{b}	vecteur issu du maillage
A	aire d'un élément triangulaire

INTRODUCTION

La connaissance des courants et de la marée dans les lagunes, les baies et les estuaires est un vaste sujet de recherche qui suscite beaucoup d'intérêts. Des modèles théoriques et numériques pour l'étude de l'hydrodynamique des lagunes, des baies et estuaires, sont de plus en plus sophistiqués et donnent des résultats probants. L'approche tridimensionnelle complète est aujourd'hui possible. Cependant, la modélisation de la couche limite reste encore empirique et limite la validité des modèles à chaque cas étudié. Une étude de l'hydrodynamique des baies peu profondes fortement influencées par le vent a été faite par Militello [41]. Elle s'intéresse dans cette étude, aux harmoniques d'un mouvement oscillatoire généré par le vent. Elle a montré pour un écoulement moyen unidimensionnel, que l'une des sources des harmoniques est le vent. Elle a aussi montré que l'interaction entre la vitesse quadratique du vent avec l'élévation de la surface libre de l'eau peut produire soit des harmoniques impaires, soit des harmoniques paires. Jenkens [32] a développé un modèle instationnaire de Boussinesq pour l'hydrodynamique du rivage. Il développe un modèle de transformation d'onde capable de représenter les processus de refraction, de diffraction, de perte d'énergie due au frottement au fond, de rupture et de restauration dans une bathymétrie complexe. Le modèle est capable de reproduire une large gamme de phénomènes hydrodynamiques et, est adaptable à beaucoup de systèmes hydrodynamiques côtiers. Zhan & Gin [56] présentent un modèle tridimensionnel qui simule les écoulements dans les côtes de Singapour. L'algorithme utilisé pour simuler l'élévation de la surface libre de l'eau est celui de prédiction-correction d'ordre 2 d'Euler. Les équations régissant l'écoulement sont discrétisées explicitement et implicitement en différences finies dans un domaine à maillage non uniforme. Les résultats donnés par le modèle 3D montrent que l'élévation de la surface libre de l'eau coïncide parfaitement avec les résultats analytiques. Le modèle est ensuite testé sur les côtes de Singapour et les eaux environnantes. Une première simulation est faite sans la prise en compte des effets du vent. Une seconde simulation est ensuite faite mais cette fois avec les effets du vent, pour évaluer les effets des vents saisonniers. Bristeau & Coussin [11] utilisent le modèle de Saint Venant habituel pour décrire les écoulements dans les rivières, les zones côtières et les inondations. Le système hyperbolique de conservation de lois est appliqué à un maillage non structuré utilisant la méthode des volumes finis. Au système d'équations de

St Venant, on ajoute un terme de friction, qui joue un rôle important lorsqu'on se trouve dans de petits fonds. Il est montré dans cette étude, comment on peut remédier aux problèmes de conditions aux limites lorsqu'elles sont insuffisantes notamment dans les écoulements fluviaux, par la méthode des invariants de Riemann. Roberts & Zoppou [45] présentent une méthode robuste et efficace basée sur un maillage non structuré d'éléments triangulaires qui peut étudier l'hydrodynamique dans les bassins à fonds secs. Ils présentent en particulier une méthode explicite d'ordre 2 qui traite les fonds secs d'une manière stable. Holtschlag & Koschik [31] présentent un modèle hydrodynamique bidimensionnel appliqué à la rivière St. Clair-Detroit. Ce modèle utilise la méthode des éléments finis. Dans ce travail, une présentation des tests de calibrage et du calage du modèle est faite. Des tests sont effectués pour évaluer et augmenter la capacité du modèle à décrire la distribution horizontale de l'écoulement dans la rivière de St. Clair-Detroit. Guillou [29] propose dans ses travaux, un modèle pour les écoulements côtiers et estuariens basé sur les équations de St. Venant dans la formulation débit unitaire-dénivellation. Il propose aussi dans ce travail la technique des volumes finis pour mieux approcher la frontière.

De nombreux travaux ont été effectués sur le système Ebrié. Tastet [52] s'est intéressé de façon générale à l'environnement physique du système lagunaire Ebrié. Varlet [54] s'est quant à lui, penché sur les traits physiques essentiels. Adou [1] a fait une étude hydrologique du continental terminal de la région d'Abidjan. Dia [22] a étudié le problème de sédimentation dans les chenaux de navigation du Port Autonome d'Abidjan ; et Affian [2] a présenté une approche environnementale d'un écosystème lagunaire microtidal (la lagune Ebrié de Côte d'Ivoire), par des études géochimiques, bathymétriques et hydrologiques. Ces travaux étudient pour la plupart du temps les phénomènes physiques à partir de mesures ou d'observations faites sur le terrain ; et n'ont pas mis l'accent sur l'aspect modélisation et simulation numérique.

Nous allons dans cette étude, présenter, un modèle numérique capable de simuler les courants et les marées dans la lagune. La connaissance détaillée des courants, même faibles, peut permettre de prévoir une éventuelle contamination par pollution [7]. En effet, les courants peuvent permettre de savoir comment se fait le transport et la dispersion des substances polluantes après l'action du jet. Les courants peuvent aussi permettre d'évaluer l'impact d'une centrale thermique par exemple sur un site (à savoir les réchauffements par les rejets de la centrale).

Nous présentons dans ce travail deux méthodes numériques pour le calcul des courants et des marées dans le canal de Vridi.

La première approche est basée sur la méthode des éléments finis. Nous utilisons pour la simulation numérique, les équations de St. Venant en 2D. Une discrétisation du canal par des éléments triangulaires à trois nœuds donne après application des conditions aux limites, un système de 450 équations. Ce système est résolu par le schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre couplé à un schéma de prédiction-corrrection

du même ordre. Dans ce modèle, nous prenons en compte les effets du vent à la surface libre, du frottement au fond, les termes convectifs, les termes de Coriolis et les termes de viscosité. Des tests numériques sont effectués avec ces différents termes et en particulier celui de viscosité turbulente pour calibrer le modèle. Nous approchons le modèle tridimensionnelle par la méthode des multicouches bidimensionnelles, pour voir l'influence de l'écoulement dans différentes couches dont sont issues les mesures de courants, sur les phénomènes de marées.

La seconde approche, vise à améliorer l'estimation de l'hydrodynamique d'un écoulement à travers une meilleure prise en compte des frontières ouvertes. On introduit un forçage traduisant l'influence des fluctuations de courants lagunaires et de la marée sur l'élévation de la hauteur d'eau dans un canal ayant une ouverture sur la mer. En effet, la prise en compte de ce forçage dans les conditions de radiations de Blumberg et Kantha [9] montre une nette amélioration du niveau de l'estimation de l'hydrodynamique dans le canal. Les écarts observés entre les calculs et les mesures sont inférieures à 10%. Ce modèle que nous présentons avec des approches numériques différentes donne des résultats satisfaisants. C'est un bon modèle et il pourrait servir de base à des simulations dans certains systèmes fonctionnant comme une estuaire présentant une liaison estuaire/mer par un canal étroit.

Pour mieux rendre dynamique le cadre méthodologique choisi, il nous est apparu important d'organiser notre travail en quatre grandes parties :

- La première partie donne les généralités sur les phénomènes de marées et de courants, et présente un domaine caractéristique qui est la lagune Ebrié.
- La deuxième partie trace le procédé suivi depuis les équations de base des écoulements à surface libre ou équations de Navier-Stokes pour aboutir aux équations de St Venant.
- La troisième partie, nous présente la résolution numérique par la méthode des éléments finis et les tests numériques avec les différents résultats obtenus.
- La quatrième partie s'intéresse aux conditions de radiation pour le canal de Vridi.

Première partie

**PRESENTATION DES
PHENOMENES DE MAREES
ET DE COURANTS**

Chapitre 1

Définition des mots clés du sujet

Avant d'aborder le problème de la modélisation, il convient de définir les termes clés du sujet que sont : la lagune, les courants, les marées et les hauteurs de marées ; donner leurs origines.

1.1 Les lagunes

Ce sont des étendues d'eaux saumâtres, peu profondes, à proximité d'eau basse côte, entre les terres et la mer dont une flèche de sable les sépare. De par leur forme, nous avons quatre type de lagunes :

- les lagunes fermées : elles n'ont aucune ouverture sur la mer. Dans ces lagunes, les actions des vagues et des vents y sont dominantes.
- les lagunes partiellement fermées : elles n'ont qu'une ouverture sur la mer. Les actions des vagues et des courants côtiers y dominent.
- les lagunes ouvertes : elles ont une grande ou plusieurs ouvertures sur la mer. La marée et l'action des vagues y sont dominantes.
- les lagunes estuariennes : elles ont plusieurs petites ouvertures rapprochées. Une marée et un écoulement tributaire y sont dominants.

Nous pourrions classer la lagune Ebrié dans la catégorie des lagunes partiellement fermées (voir Annexe 1) car l'embouchure du Comoé étant très souvent fermée, elle n'est reliée à la mer que par le canal de Vridi, qui a une largeur moyenne de 370 mètres, et une longueur d'environ 2700 kilomètres.

1.2 Les courants

Les courants sont des masses d'eaux froides ou chaudes qui entraînent des quantités d'eaux considérables dans les profondeurs ou à la surface de l'eau.

1.3 Les marées

Les marées sont des mouvements périodiques des eaux qui s'élèvent (marée montante, flot ou flux), restent étales, redescendent (marée descendente, jusant ou reflux), restent étales à nouveau avant de remonter.

1.4 La hauteur de marée

C'est la différence entre une marée basse et une marée haute consécutives et vice versa.

1.5 Origines des courants et des marées

Le mouvement périodique des eaux, qui va de pair avec la production des marées hautes, des marées basses et des courants alternés, est produit par la lune et le soleil; les autres astres étant trop éloignés de la terre pour que leur action puisse être sensible. Les courants peuvent avoir d'autres origines : les effets de gravité, les afflux d'eaux extérieurs, etc...

1.5.1 Les courants

Ils sont dûs à plusieurs phénomènes :

- les courants de marée : ils sont d'origine astronomique. Ils sont provoqués par le flux et reflux des eaux. Il s'agit ici :

* des courants de flot ; qui règnent depuis la mi-marée du gagnant au perdant, et qui sont dirigés dans le sens de propagation de la marée.

* des courants de jusant ; qui sont opposés aux précédents, et qui règnent de la mi-marée au perdant à la mi-marée au gagnant.

- les courants de dérive : ils sont dûs au vent. Le vent provoque un entraînement superficiel des eaux qui, par viscosité, se transmet aux couches plus profondes. En absence de rotation terrestre, on observerait un courant portant dans la direction vers laquelle souffle le vent. La rotation terrestre a pour effet de modifier la direction du courant de dérive formé ; si l'on se trouve au large, au-dessus de grands fonds (100 à 200 m) et si le vent a soufflé pendant un temps suffisant (probablement 2 à 3 jours) en tout point d'une étendue d'eau indéfinie, le courant est dirigé à 45° dans la direction vers laquelle souffle le vent, à droite dans l'hémisphère Nord, et à gauche dans l'hémisphère Sud. Dans les couches de plus en plus profondes, l'angle entre la direction du vent et le courant augmente et la vitesse diminue rapidement suivant une loi exponentielle. Un tel courant entraîne un flux d'eau entre la surface et le fond, qui est orienté à 90° de la direction vers laquelle souffle le vent, à droite dans

l'hémisphère Nord, à gauche dans l'hémisphère Sud; on conçoit alors que devant une côte il puisse y avoir un afflux des eaux vers la côte (montée de niveau) ou, au contraire, un reflux (baisse de niveau).

Si on se trouve par petits fonds, le courant de dérive superficiel créé fait avec la direction du vent un angle de 20 à 25° en moyenne (à droite dans l'hémisphère Nord, à gauche dans l'hémisphère Sud).

-les courants de pente : un courant de dérive peut entraîner, on l'a vu un afflux d'eau sur une côte, ou, au contraire, un reflux. Les afflux sont provoqués par des vents tels que le flux d'eau du courant de dérive qu'ils suscitent a une composante orientée vers le rivage. Ce sont donc dans l'hémisphère Nord, les vents dont la vitesse a , selon la côte, une composante dirigée vers la gauche pour un observateur (marin) regardant vers la terre.

Cette accumulation ou ce retrait d'eau entraîne la formation d'un courant qui, au bout d'un temps assez long est, dans l'hémisphère Nord, dirigé à droite de la direction de la pente maximum descendante des eaux (orientée normalement au rivage, vers le large, dans le cas d'un afflux des eaux) d'un angle voisin de 90° dès que la profondeur de l'eau est assez grande près de la côte.

-les courants de densité : ils sont dûs aux variations de densité du milieu fluide (cette densité qui est elle même dépendante de la température, de la salinité, de la pression, etc...).

Les courants sont généralement des déplacements de l'eau dans les deux sens : horizontal et vertical.

De par leur morphologie et leur situation par rapport à la mer, les écoulements lagunaires sont soumis de façon générale d'une part aux doubles influences océaniques et continentales, et d'autre part, aux effets du vent ; En ce qui concerne l'écoulement lagunaire dans le système Ebrié, l'origine des eaux et l'importance de leurs flux d'entrée et de sortie déterminent la qualité et le taux de renouvellement des eaux. Ces flux sont essentiellement représentés par des arrivées d'eaux fluviales à l'interface continent-lagune et par des sorties d'eaux marines à l'interface océan-lagune. Les vents aussi facilitent la circulation des eaux de surface vers l'océan.

1.5.2 Les marées

Si la terre et la lune étaient immobiles, les forces d'attraction de la loi de NEWTON auraient pour effet de les rapprocher l'une de l'autre, jusqu'à ce qu'elles se touchent. Cependant, les mouvements mensuels de la terre et de la lune autour de leur centre de gravité commun, produisent des forces centrifuges qui équilibrent les forces d'attraction opposées. A cause de la grande distance séparant la terre de la lune, il y a équilibre entre l'ensemble des particules de la lune d'une part et l'ensemble de toutes les forces centrifuges d'autre part.

Cet équilibre n'existe cependant plus pour un point déterminé de la surface du

CHAPITRE 1. DÉFINITION DES MOTS CLÉS DU SUJET

globe. En effet, la force d'attraction dépend de la distance de ce point de la surface de la terre à la lune, alors que la force centrifuge est la même pour tous les points de la terre, puisqu'ils participent tous au même mouvement autour du centre de gravité terre-lune. Il y a donc, en chaque point de la surface de la terre, une force résiduelle, qui est la force qui produit la marée.

Au point A de la figure 1, pour lequel la lune se trouve au zénith, la force d'attraction est plus grande que la force centrifuge parce que ce point est le moins éloigné de la lune; la force qui produit la marée est donc dirigée vers la lune. Au point B, la force d'attraction est plus petite que la force centrifuge de sorte que la force qui produit la marée est dirigée en sens opposé à la lune.

Pour tout autre point de la surface du globe, la force qui produit la marée s'obtient par composition des forces. Elle est normale à la surface du globe en quatre points seulement. Partout ailleurs, elle est oblique et a une composante normale et une composante horizontale, qui agit dans la direction de la surface de la terre.

La figure 2 montre la répartition de la composante horizontale sur la surface de la terre. Elle est la plus grande sur les deux cercles qui se trouvent à 45° du point A et du point B; elle est nulle en ces derniers points ainsi que le long du grand cercle qui se trouve à 90° de A et de B.

La maximalité de la composante horizontale sur le cercle à 45° et sa nullité en A et B provoque respectivement, un relèvement du niveau d'eau en A et B et une baisse sur le cercle à 90° de A et B.

La figure 2 suppose que la lune se trouve dans le plan de l'équateur. Lorsque la position de la lune par rapport à la terre se modifie, le système de forces de la figure 2 se déplace.

La figure 3 montre ce que devient le système de forces de la figure 2 lorsque la lune se trouve à la latitude Nord de 28° . Le champ des composantes des forces horizontales occupe une position asymétrique par rapport à l'équateur.

D'autre part, la terre tourne sur elle-même en 24 heures; un observateur placé en X1 (voir figure 2) est amené par cette rotation au point X2 : la force qui produit la marée augmente et continue à croître jusqu'à ce que l'observateur atteigne le point X3 où la force atteint son maximum. A partir de ce moment elle décroît. Après 6 heures, lorsque l'observateur se trouve en X4 elle s'annule de nouveau.

Dès lors elle change de sens, atteint un nouveau maximum après 9 heures et ainsi de suite jusqu'à ce qu'après 24 heures l'observateur revienne en X1. La rotation de la terre produit donc une variation semi-diurne de la force et elle est la cause de la variation semi-diurne des phénomènes de marée de manière générale.

Eu égard au fait que la force qui produit la marée est la différence entre la force d'attraction et la force centrifuge et que ces forces dépendent de la distance qui sépare la lune de la terre, la force qui produit la marée dépendra aussi avec cette distance, qui varie au cours de chaque mois.

Par ailleurs lorsque la lune ne se trouve pas dans le plan de l'équateur, les forces

CHAPITRE 1. DÉFINITION DES MOTS CLÉS DU SUJET

qui produisent la marée ne sont pas les mêmes au cours des deux moitiés d'une même journée, ce qui donne lieu à une inégalité diurne.

Toutes ces circonstances ont pour effet que la force de la marée due à la lune est d'une nature périodique, la période principale est celle de la demi-journée lunaire (en moyenne 12h25 minutes). Elle dépasse les autres en intensité et commande le phénomène de la marée.

Si nous considérons maintenant le soleil, nous sommes conduits d'une manière analogue à un système de forces produisant la marée. Les forces dues au soleil sont cependant sensiblement plus petites que celles dues à la lune.

L'action simultanée de la lune et du soleil produit l'inégalité semi-mensuelle : à la nouvelle et à la pleine lune les forces s'ajoutent, tandis qu'au premier et au dernier quartier l'effet du soleil contrecarre celui de la lune. C'est là l'origine, respectivement des marées de syzygie (vive eau) et des marées de quadrature (morte eau).

Afin de fixer les idées nous ferons encore remarquer que les forces qui produisent les marées sont extrêmement petites.

Le fait que des forces si petites parviennent à produire des effets si importants que constituent les marées, peut s'expliquer comme suit :

Si dans ce qui précède nous avons attaché une grande importance à la composante horizontale de la force qui produit la marée, c'est parce que, quoique du même ordre de grandeur, la composante verticale ne s'exerce en chaque point que sur une colonne dont la hauteur est très faible vis à vis du rayon terrestre, tandis que l'action de la composante horizontale se transmet de proche en proche, dans le même sens, à toutes les files verticales de molécules entre la circonférence du cercle d'illumination et l'un des pôles de ce cercle, soit sur une longueur de 10 000 Km environ.

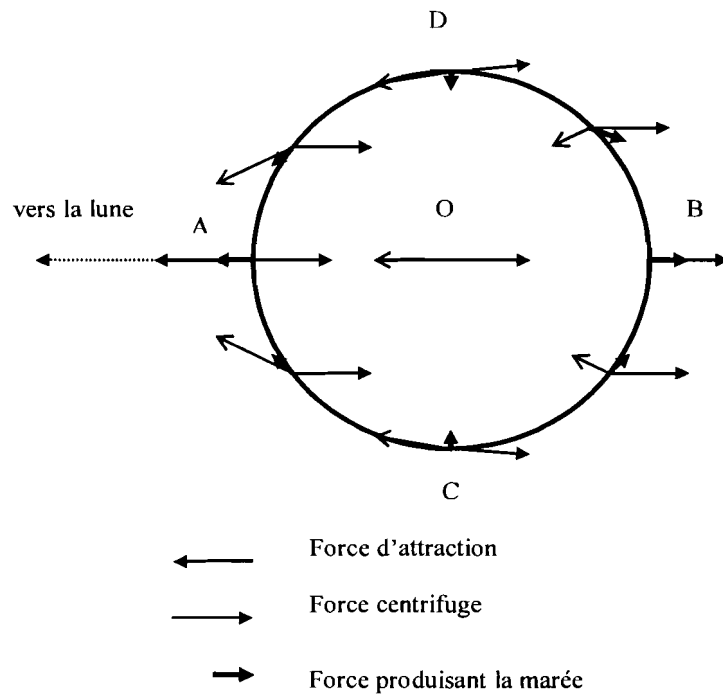


Figure 1 : Système de forces décrivant les phénomènes de marées

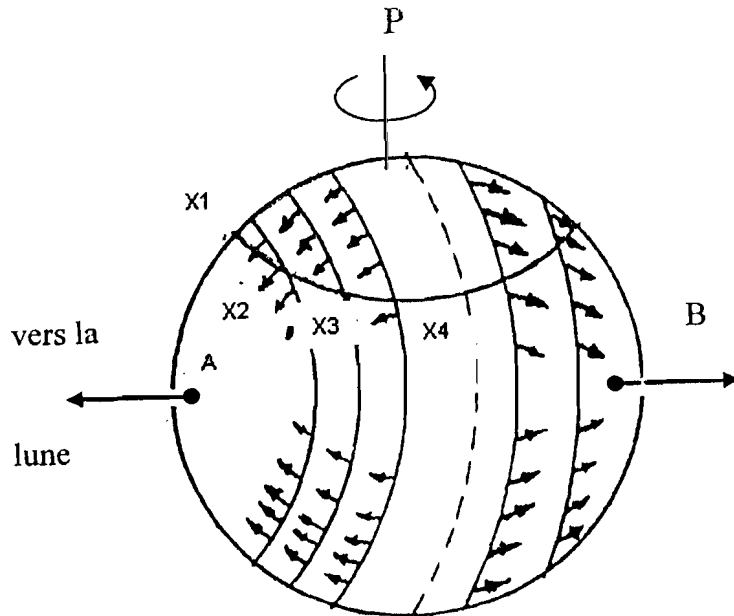


Figure 2 : Repartition de la composante horizontale sur la surface de la terre de la force qui produit la marée

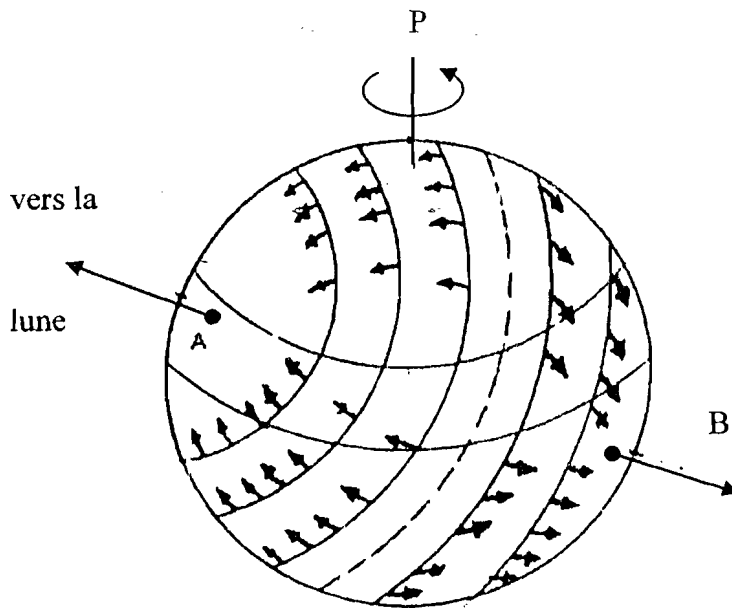


Figure 3 : Repartition de la composante horizontale sur la surface de la terre de la force qui produit la marée lorsque la lune se trouve à la latitude Nord de 28°

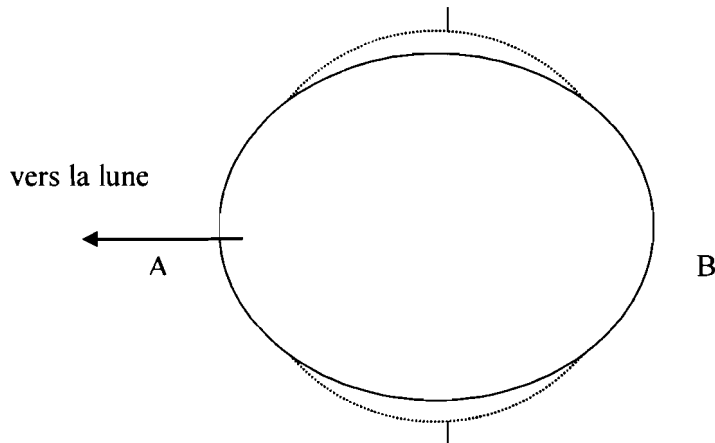


Figure 4 : Figure indiquant le relèvement du niveau d'eau en A et B et une baisse sur le cercle à 90° et de A et B

1.5.3 Mesure des courants

De manière pratique, la mesure des courants se fait à l'aide d'un appareil qu'on appelle le courantomètre, qu'on plonge dans l'eau aux endroits où l'on souhaiterait faire des mesures, et l'appareil donne des informations sur l'amplitude des courants, et les directions de ces courants.

1.5.4 Observation des marées

Les marées aussi, de manière pratique sont observées à l'aide de marégrammes, données par des marégraphes installés au bord des bassins.

De par l'analyse des marégrammes, on constate qu'il existe trois types de marées que sont :

-les marées semi-diurnes : elles comportent deux marées hautes et deux marées basses par jour lunaire (24h 45). C'est le type de marée que nous avons chez nous ici en Côte d'Ivoire, mais à inégalité journalière. Le marnage ne dépasse pas 1.3m en vive eau et peut descendre à 0.5m en morte eau [54]. La marée se propage sur l'ensemble de la lagune, mais s'amortit au fur et à mesure qu'on s'éloigne du canal et la durée de flot est plus courte que celle de jusant [51].

-les marées diurnes : elles présentent une seule marée haute et une seule marée basse par jour lunaire. Le gagnant et le perdant durent chacun un peu plus de 12 heures.

-les marées mixtes : elles comprennent deux marées hautes et deux marées basses par jour, mais les marées du matin diffèrent de celles du soir.

Chapitre 2

Présentation du système lagunaire Ebrié

Dans l'étude qui va suivre, notre attention sera portée particulièrement sur le système lagunaire EBRIE, compte tenu de son importance dans l'économie de la Côte d'Ivoire par la présence du Port Autonome d'Abidjan (PAA).

Nous allons donc présenter le système lagunaire EBRIE ; à savoir sa situation géographique, les traits essentiels morphologiques, climatologiques et hydrologiques.

2.1 Situation géographique

Le système lagunaire Ebrié est situé sur le littoral Sud de la Côte d'Ivoire (Annexe 2), où il s'allonge d'Est à l'Ouest sur une longueur de 125 km entre 3°40 et 4°50 de longitude Ouest. Son axe général est légèrement incliné par rapport aux parallèles, et sa position par rapport à l'équateur est approximativement 5°15' Nord.

C'est le système le plus important des lagunes côtières de la basse Côte d'Ivoire, formant avec elles un réseau navigable de plus de 300 km pour des embarcations de tirant d'eau inférieur à 1,5 m. Le port d'Abidjan ouvert aux navires de la mer depuis juillet 1950, est implanté dans la lagune Ebrié. Le rôle des lagunes a donc été primordial pour le développement économique du pays.

Un cordon littoral argilo-sableux, de largeur variant de 0,8 à 8 km, sépare ces lagunes de la mer. La formation du système Ebrié est expliqué [52], [1] par la régression des mers il y a 18 000 à 30 000 ans à -110 m de la côte actuelle, avec un dépôt simultané argilo-sableux sur ces parties découvertes dénuées de couverture végétale, suivie d'une humidification du climat, entraînant la formation de puissants cours d'eau qui ont taillé des vallées profondes à travers ces dépôts. Ces cours d'eau convergeaient vers le grand canyon sous marin à environ 3°59 de longitude Ouest, à quelques kilomètres seulement de la côte actuelle. La remontée de la mer dans ces

CHAPITRE 2. PRÉSENTATION DU SYSTÈME LAGUNAIRE EBRIÉ

vallées et les courants marins côtiers charriant et déposant des sables ont finalement constitué et isolé ces lagunes.

2.2 Morphologie

Les lagunes sont limitées au Nord par des pentes abruptes découpées dans le bassin sédimentaire qui s'est constitué le long du continental terminal, parallèlement à la côte. Ainsi au Nord des lagunes, la géomorphologie est un vaste plateau dont l'altitude varie de 40 à 110 m. Au Sud, les cordons littoraux limitant le système constituent de bas plateaux avec une élévation de l'ordre de 2 à 10 m.

De forme très allongée, le système Ebrié a cependant une géométrie complexe à cause de la présence de nombreuses baies.

Les caractéristiques géométriques sont données ci-dessous [54] pour la lagune Ebrié sans le système Potou-Aghien :

Longeur (Km)	Surface (Km ²)	Volume (Km ³)
Périmètre : 644	Total : 608	
Axe médian : 132	Îles : 85	
Rive Nord : 401	Plan d'eau : 523	Total : 2.5
Rive Sud : 243	Baie : 99	
Largeur : 1 à 7		

Tableau 1 : Caractéristiques géométriques du système Ebrié

Les baies occupent près du cinquième de la surface totale. En comparant les longueurs des rives Nord et Sud, on voit que les baies et échancrures sont plus nombreuses au Nord qu'au Sud. Si on définit un coefficient de tortuosité [54], c'est à dire le rapport de la longueur de la rive à la longueur de l'axe médian, on trouve :

Coefficient de tortuosité	
Rive Nord : 3.0	Rive Sud : 1.8

Tableau 3 : Coefficient de tortuosité

Sans le système Potou-Aghien, la lagune Ebrié a une largeur moyenne de 4 km, une profondeur moyenne de 4.5 m. Son rapport d'allongement (longueur/largeur) est de 33. Le rapport de forme (largeur/profondeur) est de 828.

CHAPITRE 2. PRÉSENTATION DU SYSTÈME LAGUNAIRE EBRIÉ

A l'examen des cartes bathymétriques établies par le Port Autonome d'Abidjan et l'institut Géographique de Côte d'Ivoire, et complétée par [53], des distinctions morphologiques apparaissent entre les différentes parties de la lagune (annexe 3) :

- le bassin du Port d'Abidjan : C'est la partie la plus profonde de la lagune, où les tirants d'eau varient de 10 à 25 m. L'irrégularité de forme de ce bassin est accentuée par la présence de baies : baie du Banco au Nord, baie de Biétri à l'Est et le bras au Sud de l'île Bouley.

- le bras Ouest : Nous désignons sous ce nom la partie de la lagune s'étendant à l'Ouest du bassin du Port. Entre Abobo-Doumé (Club de Voile d'Abidjan - CVA) et la digue d'Abreby (connue sous le nom de digue de Jacquville, elle est située à N'Djamin sur la route d'Abreby et Jacquville : partie a - annexe 3), environ sur 25 km, le chenal présente une forme régulière très allongée, de largeur moyenne 1.5 à 2 km, de profondeur moyenne 3 à 4 m ; la profondeur maximale se trouve généralement vers le milieu du canal, le fond est souvent plat sur toute la largeur, sauf dans les premiers kilomètres à l'entrée de ce bras.

Entre la digue d'Abreby et l'extrémité Ouest (partie b - annexe 3) le bras est plus large et de forme irrégulière, comportant beaucoup plus de baies que le tronçon précédent. La largeur est de 4 à 5 km, les profondeurs maximales qui atteignent 10 à 12 m par endroits sont situées sur un axe plus proche de la digue Nord.

Signalons qu'au droit de la rivière Agnéby (à l'Est de Dabou) et à l'Est jusqu'au resserrement du chenal au niveau de la digue d'Abreby, les dépôts d'alluvions de la rivière semblent avoir comblé partiellement le bassin.

- le bras Est (partie c - annexe 3) : De largeur plus étroite en général que la partie Ouest, il comporte beaucoup de zones d'eaux mortes d'importance moyenne ou faible. La profondeur du chenal principal varie de 3 à 6 m. Ce bras est caractérisé en outre par une sinuosité plus accentuée et par l'existence de bras d'écoulement importants entourant deux grandes îles :

- 1) l'île de Petit Bassam : les deux bras entourant cette île se rejoignent au niveau de l'île Désirée. En fait, le bras Sud est coupé actuellement par une digue reliant la ville d'Abidjan à son Aéroport, et ne constitue plus que deux baies : la baie de Biétri (ou Koumassi) et la baie de Koumassi Est.

- 2) l'île Vitré : le bras Sud reçoit le Comoé, alors que le bras Nord est relié au système Potou-Aghien.

- deux autres bassins lagunaires (partie d - annexe 3), Aghien et Potou, en prolongement l'un de l'autre, sont situés au Nord et à l'intérieur. Leur direction générale est N.O-S.E, et ils communiquent entre eux et avec le reste du système par des chenaux étroits. La longueur de leur axe médian mesure 32 km, et le périmètre 72 km. La profondeur moyenne est de l'ordre de 2.5 m ; et le volume de l'ordre de 0.15 km³.

- enfin, le canal de Vridi :

Le canal de Vridi, construit pour les besoins de navigation coupe le cordon littoral

sur une longueur de 2 700 m, et joue un rôle important dans l'hydrodynamique lagunaire puisqu'il constitue maintenant l'unique liaison permanente entre la lagune Ebrié et la mer. De section trapézoïdale constante sauf à l'entrée, où il existe un rétrécissement de la largeur et un seuil à enrochement, sa profondeur est de 15 m et sa largeur à la surface libre est de 370 m. Sa direction N.O-S.E, ainsi que son ouverture à proximité du trou sans fond (grand canyon) sont destinées à éviter l'ensablement de la voie de pénétration pour les navires [3]. En effet, le trou sans fond agit comme un gigantesque piège à sable et attire tous les matériaux solides entraînés par les courants côtiers à l'embouchure du canal. Le prolongement dans la mer de la digue Ouest du canal, et la forme en convergent de l'entrée du canal ont pour fonction de dévier vers la mer, les courants côtiers chargés de matériaux venant de l'Ouest et de créer une accélération à l'entrée pour éviter tout dépôt.

2.3 Climat

2.3.1 Saison

D'une façon générale il règne sur le bassin lagunaire, un climat équatorial avec un régime de moussons à cause de la disposition du littoral ivoirien dans le golfe de Guinée par rapport à l'équateur.

On peut distinguer [23] :

- une grande saison de pluie avril-juillet, avec une précipitation mensuelle maximale en juin pouvant dépasser 700 mm,
- une petite saison de pluie de septembre à novembre, avec des précipitations moins importantes.

Ces saisons sont séparées par des périodes non pluvieuses. En particulier, il existe une grande saison sèche de décembre à mars.

Les précipitations dans la région lagunaire sont très mouvantes et très variables en importance dans l'espace. L'ordre de grandeur des précipitations annuelles est de 1500 à 2100 mm réparties en 90 à 180 jours.

2.3.2 Température, hygrométrie, insolation

La température moyenne annuelle est de 25.5 à 27°C. La moyenne mensuelle passe par un maximum entre janvier et mars (28.5°C), et par un minimum en août (24.5°C).

Le degré d'hygrométrie est élevé, et compris entre 60 et 90%. La valeur courante est de l'ordre de 85%.

L'insolation mesurée à Abidjan, est estimée à 2200 à 2300 heures en moyenne, ce qui représente environ 95 jours.

2.4 Hydrographie

Le système lagunaire Ebrié est une étendue d'eau saumâtre dont la salinité varie de 35⁰/₀₀ au canal de Vridi à 1 à 4⁰/₀₀ environ à l'extrémité du bras Ouest et à moins de 0.5⁰/₀₀ dans la lagune Aghien.

- Apport d'eau douce :

Le système est alimenté principalement par trois cours d'eau (annexe 4), dont le plus important est le Comoé, à l'Est. Il y a donc une dissymétrie dans le comportement de la lagune et dans le renouvellement de ses eaux entre le bras Est et le bras Ouest. Le Comoé est un fleuve qui prend sa source en pays de savane près de la frontière du Burkina-Faso et qui traverse du Nord au Sud toute la Côte d'Ivoire dans sa partie Est. Il draine sur une longueur de 650 km un bassin versant de 78 000 km², en traversant des régions de climats différents. Aussi, son débit n'est pas maximum lors de la grande saison des pluies du Sud (juillet-août), mais plutôt en septembre-octobre [54].

Les relevés effectués par la Direction des Etudes Hydrologiques d'Abidjan montrent que le débit moyen annuel du Comoé est de l'ordre de 300 m³/s ; en période de crue les débits moyens mensuels atteignent 1820 m³/s, et en étiage ils passent à environ 40 m³/s.

Les autres cours d'eau, l'Agnéby et la Mé, sont plus modestes, leurs bassins versants sont respectivement 8400 et 4020 km². Leurs débits moyens sont de l'ordre de 20 m³/s, avec un débit d'étiage de 1 à 2 m³/s et débit en crue de 200 m³/s. Ce sont des rivières côtières dont les crues interviennent pendant la grande saison des pluies de Juin à Août [54].

En plus des eaux drainées par ces cours d'eau, la lagune reçoit directement les eaux de ruissellement de bassins littoraux (890 km² au Nord et 590 km² au Sud), et les précipitations directes sur la surface du plan d'eau (560 km²).

Une étude rapide à partir des mesures très limitées [1] sur la nappe souterraine permet les conclusions suivantes : le coefficient d'emménagement des nappes est environ 12% ; dans son ensemble, la nappe s'écoule en direction de la lagune Ebrié, mais elle est fortement drainée par les petites rivières. Le débit d'échange direct entre la nappe et la lagune peut donc être considéré comme très faible si on tient compte correctement de tous les apports superficiels.

L'évapotranspiration sur le bassin versant lagunaire est évaluée à 60% de la pluviosité, et le ruissellement superficiel à environ 4%.

Signalons que la lagune est reliée à la lagune Aby à l'Est par le canal d'Assinie, et à l'embouchure du fleuve Bandama à l'Ouest par le canal d'Asagny. Les échanges de débits par ces canaux paraissent faibles vis-à-vis des autres apports.

- Les échanges avec la mer :

L'embouchure du Comoé à la mer à Grand-Bassam étant pratiquement fermée, tout l'échange avec la mer se fait par le canal de Vridi. L'accélération des courants

CHAPITRE 2. PRÉSENTATION DU SYSTÈME LAGUNAIRE EBRIÉ

de marée à l'entrée de la lagune par le canal de Vridi est particulièrement importante, les profondeurs entre la mer et le canal variant très rapidement à cause du trou sans fond. La pente moyenne entre le trou sans fond et l'entrée du canal est de l'ordre de 75%. La vitesse des courants atteint souvent 1.5 m/s au niveau du convergent à l'entrée.

En ce qui concerne les volumes échangés, VARLET [54] a tiré les premières conclusions et fait un premier bilan d'après les données restreintes de 1978 dont il disposait. Le tableau suivant donne les volumes mensuels (en 10^6 m³) d'eau douce et d'eau de mer reçus par la lagune et transitant par le canal de Vridi.

	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Apport Eau douce	242	235	331	434	782	104	874	1020	299	2828	847	364
Volume Entrant/mois	3870	3870	10869	6002	256	437	248	448	2788	678	351	1338
Volume Sortant/mois	4112	6393	11200	6436	3303	1532	1379	3497	5589	3393	1385	1775
Volume Entrant/flot	64	114	181	103	43	8	7	44	48	11	6	22
Volume Sortant/flot	69	118	187	111	55	26	23	58	96	57	24	30

Tableau 3 : volumes mensuels (en 10^6 m³) d'eau douce et d'eau de mer reçus par la lagune et transitant par le canal de Vridi

On voit ainsi que l'apport annuel net d'eau douce est de l'ordre de 12 milliards de m³. L'évaporation moyenne, qui est d'environ 50 mm/mois (340 millions de m³/an) représente 3% du volume d'eau douce reçu. On en a tenu compte dans le tableau précédent, mais on voit qu'elle est négligeable.

Par rapport au volume total estimé de la lagune (2.65 km³) on voit que les volumes d'eau douce et d'eau salée transitant dans la lagune sont très importants.

Pour le mois de mars par exemple, le volume entrant ou sortant par cycle de marée par le canal de Vridi (environ 185 10^6 m³) représente 1/5ème du volume de la lagune. Par conséquent, à priori on peut s'attendre à ce que les eaux de la lagune soient correctement renouvelées, sauf peut-être dans les baies où la circulation est faible.

Rappelons qu'en Côte d'Ivoire, nous avons une marée du type semi-diurne (à savoir une marée qui a deux marées hautes et deux marées basses par jour lunaire). Cette marée est la principale cause de l'écoulement lagunaire. Son influence est sensible sur tout le système Ebrié. D'une manière générale, le marnage diminue et

CHAPITRE 2. PRÉSENTATION DU SYSTÈME LAGUNAIRE EBRIÉ

le retard par rapport à la marée en mer augmente quand on s'éloigne du canal de Vridi à l'Est comme à l'Ouest.

La marée en lagune n'a pas de conséquence grave sur l'érosion des berges. L'érosion, qui se produit au niveau de ces berges, est plutôt due aux eaux de ruissellement sur les berges dépourvues de végétations à cause du déboisement.

Les courants quant à eux, participent au transport de sédiments et substances polluantes notamment au niveau d'Abidjan. Les sédiments dans la lagune proviennent des apports des eaux continentales, et sont transportés par les courants et se répartissent en fonction de la bathymétrie. Les sables tapissent les zones les moins profondes et les vases se rencontrent dans les chenaux.

Les substances polluantes sont le plus souvent rencontrées dans les baies de Biétri et de Cocody. Le transport de ces substances dans la baie de Biétri se fait plus facilement grâce à ses deux communications, à l'Ouest par le canal de Vridi et à l'Est par la buse de la baie de Koumassi ; ce qui n'est pas le cas pour la baie de Cocody.

La lagune étant reliée à la mer que par le canal de Vridi (l'embouchure du Comoé étant supposée fermée), elle sera considérée comme une lagune partiellement fermée.

Le système lagunaire Ebrié est situé en bordure d'une grande zone industrielle comme Abidjan ; il reçoit des rejets urbains ou industriels. L'eau de la lagune peut donc être considérée comme une eau visqueuse.

Le système Ebrié est un milieu au sens strict à salinité variable. Les salinités des eaux lagunaires résultent globalement de l'origine des apports et dépendent à l'échelle locale (dans le temps et dans l'espace) de l'importance et du rythme des entrées d'eau dans le système lagunaire.

La température atmosphérique est modérément élevée et très stable 26.2°C sur le système Ebrié. Cependant, dans l'étude qui va suivre, nous allons négliger les effets de la salinité, de la température et de la sédimentation.

Deuxième partie

**MODELISATION DES
PHENOMENES DE MAREES
ET DE COURANTS**

Chapitre 3

Modèle hydrodynamique

Soit $R(O_0, E_1, E_2, E_3)$ un repère lié au centre de la terre supposé galiléen. Les mouvements dans ce repère étant d'un ordre de grandeur très petit devant le rayon de la terre, nous pouvons faire l'approximation du plan β . C'est à dire que nous considérons un plan β (domaine d'intérêt) tangent à la surface de la terre contenant un point M. Et dans ce plan, on définit un repère $R_1(O_1, E_1, E_2, E_3)$ sphérique lié à la position M considérée de la surface de la terre tel que l'axe X soit dirigé vers l'Est et l'axe Y, vers le Nord (voir figure 5 et 6).

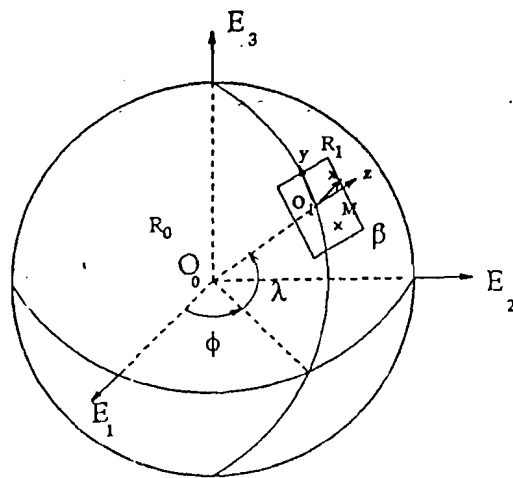


Figure 5 : Globe terrestre et plan β

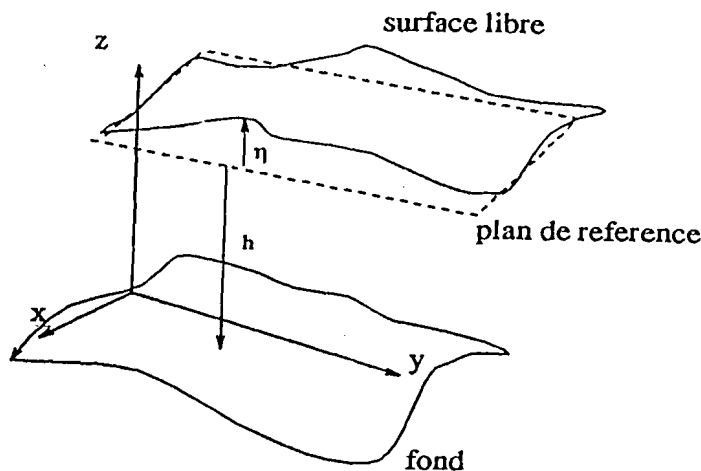


Figure 6 : Figure de définition

3.1 Position du problème

Les modèles d'écoulement à surface libre trouvent leur origine dans les équations de NAVIER-STOKES. Celles-ci sont composées d'une équation de continuité (ou de conservation de la masse), et d'une équation vectorielle de transport de quantité de mouvement. Elles s'écrivent de manière générale dans le référentiel lié à la terre sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0 \\ \rho \vec{\Gamma} = \rho_0 \vec{g}_0 + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \end{cases} \quad (3.1)$$

où, \vec{u} est la vitesse de la particule fluide,
 $\vec{\Gamma}$ désigne l'accélération de la particule fluide,
 $\vec{g}_0 = (0, 0, -g)$ est l'accélération de la pesanteur,
 $\bar{\bar{T}}$ représente le tenseur des efforts surfaciques,
 $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ est l'opérateur différentiel gradient.

L'écriture de ces équations au point M, dans le repère R_1 fait intervenir les accélérations relative $\vec{\Gamma}_r$, de Coriolis $\vec{\Gamma}_c$, et d'entraînement $\vec{\Gamma}_e$. On a donc :

$$\begin{cases} \vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_c + \vec{\Gamma}_e \\ \vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\Omega}_s \wedge \vec{u} + \vec{\Omega}_s \wedge (\vec{\Omega}_s \wedge \overrightarrow{O_1M}) \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $\vec{\Omega}_s$ qui est la vitesse de rotation de la terre. Ses composantes sont respectivement dans les directions Ox, Oy et Oz :

$$\begin{cases} \Omega_1 = 0, \\ \Omega_2 = |\Omega_s| \cos \lambda, \\ \Omega_3 = |\Omega_s| \sin \lambda, \end{cases} \quad (3.3)$$

λ étant la latitude moyenne du domaine d'étude, ici égale à $5^\circ 15'$.

Comme l'accélération d'Euler (c'est l'accélération du point M dans le repère $R_1 (O_1, E_1, E_2, E_3)$ à un instant t donné, le point M étant supposé immobile à l'instant considéré et en mouvement avec son repère dans le repère lié au centre de la terre) est nulle, on peut fusionner l'accélération centripète $\vec{\Omega}_s \wedge (\vec{\Omega}_s \wedge \overrightarrow{O_1M})$ et le terme de gravité, c'est à dire :

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\Omega}_s \wedge (\vec{\Omega}_s \wedge \overrightarrow{O_1M}). \quad (3.4)$$

L'accélération devient donc :

$$\vec{\Gamma}' = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\Omega}_s \wedge \vec{u}, \quad (3.5)$$

avec $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ la dérivée partielle en temps de la vitesse dans le repère R_1 .

Le tenseur \vec{T} est composé d'un scalaire P traduisant les effets de pression et d'un tenseur de composantes τ_{ij} traduisant les effets de la dilatation due à la viscosité :

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker}). \quad (3.6)$$

L'hypothèse de Boussinesq nous permet de négliger les variations de densité de l'eau par rapport à sa densité de référence ρ_r ($\nabla \rho_r \ll \rho$), à l'exception de celles rencontrées dans les termes de gravitation dans les équations de quantité de mouvement (termes de flottabilité). On se place ainsi dans le cas de l'hypothèse d'un fluide quasi-incompressible.

Compte tenu de (3.4) et (3.5), les équations (3.1) deviennent :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \rho_r \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho \vec{g} - 2\rho_r \vec{\Omega}_s \wedge \vec{u} - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} \end{cases} \quad (3.7)$$

avec,

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} = \rho_r \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \rho_r \nu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \quad (3.8)$$

Le fluide étant supposé quasi-incompressible, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, ce qui nous donne donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} = \rho_r \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}. \quad (3.9)$$

Le système d'équations (3.7) peut encore s'écrire en notation indicielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_r u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_r u_i u_j) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (P \delta_{ij} - \tau_{ij}) - \rho g \delta_{i3} - 2\rho_r \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k. \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans l'expression (3.10), on a :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } ijk = \{123\}, \\ -1 & \text{si } ijk = \{231\}, \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Avec l'approximation du plan β , on peut supposer \vec{g} perpendiculaire à ce plan, et travailler dans un repère cartésien. On peut aussi supposer que le coefficient de Coriolis ($f = 2\Omega_s \sin \lambda$) est constant.

Afin de paramétriser les petites échelles de temps et d'espace, correspondant aux phénomènes de turbulence, on calculera le mouvement moyen. On adoptera pour cela la décomposition classique qui à une grandeur f , fait correspondre la moyenne temporelle ci-après :

$$\bar{f}(x, t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x, t') dt' \quad (3.12)$$

et la fluctuation associée :

$$f'(x, t) = f(x, t) - \bar{f}(x, t) \quad (3.13)$$

à valeur moyenne nulle ($\bar{f}' = 0$).

Cette décomposition se justifie, pourvu que l'intervalle d'intégration $2T$ soit plus petit devant l'échelle de temps caractéristique du phénomène physique instationnaire et du même ordre de grandeur que l'échelle intégrale de la turbulence. Dans ces conditions, les équations de bilan précédentes se décomposent en équations moyennes et équations de fluctuations. Les propriétés relatives à l'opération de moyenne ci-dessus pour deux fonctions f et g intégrables de classe C^2 sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{fg} = \bar{f}\bar{g} \\ \overline{\lambda f} = \lambda \bar{f} \quad \forall \lambda \in R \\ \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

En faisant donc la moyenne des équations de NAVIER-STOKES, on obtient :

- pour l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} = 0, \quad (3.15)$$

- et pour l'équation de quantité de mouvement :

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} (\rho_r u_i)} + \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_r u_i)} = - \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} (P \delta_{ij} - \tau_{ij})} - \overline{\rho g \delta_{i3}} - \overline{2\rho_r \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k}. \quad (3.16)$$

En supposant que ρ et g ne sont pas fonction du temps, on a (3.16) qui devient :

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} (\rho_r u_i)} + \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_r u_i)} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{P} + \rho_r \nu \overline{\nabla^2 u_i} - \rho g \delta_{i3} - \overline{2\rho_r \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k}. \quad (3.17)$$

Evaluons dans l'équation (3.17), l'expression $\overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i)}$. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{(\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j}} \\ = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \\ = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right., \quad (3.19)$$

on aura aussi :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.20)$$

Ce qui nous donne :

$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j} - u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j}. \quad (3.21)$$

On peut finalement écrire :

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_j}. \quad (3.22)$$

On a aussi :

$$\nabla^2 \bar{u}_i = \bar{D}_{ij,j} \quad (3.23)$$

avec,

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}. \quad (3.24)$$

D'où :

$$\bar{D}_{ij,j} = \bar{u}_{i,jj} + \bar{u}_{j,ij} = \bar{u}_{i,jj} + \bar{u}_{i,ji}. \quad (3.25)$$

L'équation de continuité donnant $\bar{u}_{i,ji} = 0$, on aura :

$$\bar{D}_{ij,j} = \bar{u}_{i,jj} = \nabla^2 \bar{u}_i. \quad (3.26)$$

L'équation de quantité de mouvement devient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_r \bar{u}_i) + \rho_r \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \rho_r \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ - \rho_r \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) - \rho g \delta_{i3} - 2\rho_r \varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{u}_k. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

En notant :

$$\tau_{ij} = \rho_r \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho_r (\overline{u'_i u'_j}), \quad (3.28)$$

τ_{ij} étant le tenseur des contraintes visqueuses dans le cas turbulent, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_r \bar{u}_i) + \rho_r \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g \delta_{i3} - 2\rho_r \varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{u}_k. \quad (3.29)$$

Les équations (3.15) et (3.29) s'écrivent donc dans le repère R_1 , comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = f\bar{v} - f_1 \bar{w} - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_r} \tau_{1j,j} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -f\bar{u} - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_r} \tau_{2j,j} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho_r} g - f_1 \bar{u} - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_r} \tau_{3j,j}. \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Avec, $f = 2\Omega_s \sin \lambda$ (qui représente le coefficient de Coriolis) et $f_1 = 2\Omega_s \cos \lambda$; λ est la latitude moyenne du domaine d'étude.

Il faut noter que dans l'expression du tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} , le terme :

$$R_{ij} = -\rho_r \overline{u'_i u'_j} \quad (3.31)$$

représente le tenseur de Reynolds ou de corrélation double. Il caractérise les effets de la turbulence à travers les échanges énergétiques entre le mouvement moyen et le mouvement fluctuant. Il provient de la non linéarité des termes convectifs et constitue une inconnue de plus pour le problème. Sa modélisation nécessite une fermeture. R_{ij} est vu comme une contrainte s'apparentant aux effets visqueux.

La fermeture de Newton ou du premier ordre donne :

$$-\overline{u'_i u'_j} = -\frac{2}{3} K \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.32)$$

où,

$$K = \frac{1}{2} u_i'^2 \quad (3.33)$$

est l'énergie cinétique de la turbulence, et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Pour cette étude, nous allons nous limiter au modèle de Fourier-Fick-Onsager, qui relie la contrainte turbulente au gradient de la vitesse moyenne multipliée par une viscosité turbulente liée à la direction. Ainsi donc, on utilisera pour la suite comme [29] :

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \mu_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \\ \mu_x = \mu_y = \rho A_H, \\ \mu_z = \rho A_V. \end{cases} \quad (3.34)$$

Il faut noter ici, qu'il n'y a pas de sommation sur l'indice j . Par la suite, pour alléger les notations, les barres (-) sont enlevées, et on note $\bar{u}_i = u_i$.

3.2 Analyse dimensionnelle

Les équations (3.30) sont difficilement applicables aux écoulements en eaux peu profondes, telles que la lagune Ebrié sur laquelle l'étude se porte ici. Les raisons sont les suivantes :

- 1) la présence de la surface libre ;
- 2) la variation de la nature des frontières au cours du temps (c'est à dire quand la marée monte ou descend) ;
- 3) le grand nombre de variables inconnues.

Pour surmonter ces problèmes, et avoir des équations adéquates, nous allons simplifier les équations (3.30). Nous allons :

- 1) supposer que la repartition de la pression est hydrostatique (la pression sera uniquement fonction de la profondeur),
- 2) négliger la vitesse verticale.

Il s'agit en clair, d'éliminer l'équation de transport de la vitesse verticale au profit de l'équation hydrostatique.

Pour ce faire, nous allons faire une analyse dimensionnelle des équations (3.30). A cet effet, nous rapportons ici la démarche de [29], que nous adoptons. Soient :

- U_0, W_0 , les échelles caractéristiques de vitesses horizontale et verticale (u, v, w) ;
- L, D , les échelles caractéristiques de longueurs horizontale et verticale (x, y, z) ;
- A_{H_0}, A_{V_0} , les échelles caractéristiques de viscosités turbulentes horizontale et verticale ;

CHAPITRE 3. MODÈLE HYDRODYNAMIQUE

P_0 , l'échelle caractéristique de pression ;
 g_0 , l'échelle caractéristique de gravité ;
 ρ_r , l'échelle caractéristique de densité de référence ;
 $T_0 = \frac{L}{U}$, l'échelle caractéristique de temps ;
 $\delta = \frac{D}{L}$, l'échelle caractéristique du rapport d'aspect.

Ainsi, on peut relier les quantités dimensionnelles aux quantités adimensionnelles par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u = U_0 u' ; \quad v = U_0 v' ; \quad w = W_0 w' \\
 p = P_0 p' \\
 g = g_0 g' \\
 \rho = \rho_r \rho' \\
 A_H = A_{H_0} A'_H ; \quad A_V = A_{V_0} A'_V \\
 t = T_0 t' \\
 (x, y, z) = (Lx', Ly', Dz') .
 \end{array} \right. \quad (3.35)$$

La partie de la lagune que nous étudions, a une longueur moyenne de 5 km, une largeur moyenne de 3.65 km, et une profondeur moyenne de 15 m. L'analyse des mesures de courants dont nous disposons, nous donne $U_0 \approx 0.5$ m/s et $\delta \approx 10^{-3}$ en supposant que $D = 15$ m et $L = 5.10^3$ m.

On recherche les différents ordres de grandeur en introduisant ces relations dans les équations (3.30), et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{U_0}{L} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + \frac{W_0}{D} \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \\
 \\
 \frac{U_0}{T_0} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{U_0^2}{L} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + \frac{W_0 U_0}{D} w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = 2\Omega_s U_0 v' \sin \lambda \\
 - 2\Omega_s W_0 w' \cos \lambda - \frac{F_0}{\rho_r L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{U_0 A_{H0}}{L^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} A'_H \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} A'_H \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + \frac{U_0 A_{V0}}{D^2} \frac{\partial}{\partial z'} A'_V \frac{\partial u'}{\partial z'} \\
 \\
 \frac{U_0}{T_0} \frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{U_0^2}{L} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + \frac{W_0 U_0}{D} w' \frac{\partial v'}{\partial z'} = -2\Omega_s U_0 u' \sin \lambda \\
 - \frac{F_0}{\rho_r L} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{U_0 A_{H0}}{L^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} A'_H \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} A'_H \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + \frac{U_0 A_{V0}}{D^2} \frac{\partial}{\partial z'} A'_V \frac{\partial v'}{\partial z'} \\
 \\
 \frac{W_0}{T_0} \frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{U_0 W_0}{L} \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + \frac{W_0^2}{D} w' \frac{\partial w'}{\partial z'} = -g_0 g' \rho_r \rho' \\
 - 2\Omega_s U_0 u' \cos \lambda - \frac{F_0}{\rho_r D} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{W_0 A_{H0}}{L^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} A'_H \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} A'_H \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + \frac{W_0 A_{V0}}{D^2} \frac{\partial}{\partial z'} A'_V \frac{\partial w'}{\partial z'}
 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Le principe de moindre dégénérescence, appliqué à l'équation (3.36₁), impose l'égalité des ordres de grandeurs du terme horizontal et du terme vertical,

$$\frac{U_0}{L} = \frac{W_0}{D}, \quad (3.37)$$

d'où :

$$W_0 = \delta U_0. \quad (3.38)$$

On déduit donc l'échelle de temps de l'analyse des dimensions de la vitesse horizontale, c'est à dire une distance horizontale divisée par un temps caractéristique :

$$T_0 = \frac{L}{U_0}. \quad (3.39)$$

Si l'on considère que l'ordre de grandeur des coefficients de turbulence dans une direction est proportionnel au produit de la longueur caractéristique par la vitesse caractéristique dans la même direction, on écrira :

$$A_H \approx O(LU_0) \text{ et } A_V \approx O(DW_0) = O(\delta^2 LU_0), \quad (3.40)$$

d'où les échelles caractéristiques de viscosité turbulente A_H et A_V horizontale et verticale :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_H = LU_0 \\
 A_V = LU_0 \delta^2
 \end{array} \right. \quad (3.41)$$

En introduisant (3.37), (3.38), (3.39), dans (3.36₂), (3.36₃) et (3.36₄), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_0^2}{L} \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) = 2\Omega_s U_0 (v' \sin \lambda - \delta w' \cos \lambda) \\ \quad - \frac{P_0}{\rho_r L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{U_0^2}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x'} A'_H \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} A'_H \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'} A'_V \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \\ \\ \frac{U_0^2}{L} \left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) = -2\Omega_s U_0 u' \sin \lambda \\ \quad - \frac{P_0}{\rho_r L} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{U_0^2}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x'} A'_H \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} A'_H \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'} A'_V \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) \\ \\ \delta \frac{U_0^2}{L} \left(\frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) = -\rho_r g_0 g' \rho' - 2\Omega_s U_0 u' \cos \lambda \\ \quad - \frac{P_0}{\rho_r D} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \delta \frac{U_0^2}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x'} A'_H \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} A'_H \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'} A'_V \frac{\partial w'}{\partial z'} \right). \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Pour alléger les expressions, on notera ($i = 1, 2, 3$),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du'_i}{dt'} = \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'_i}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'_i}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'_i}{\partial z'} \\ \\ \Delta u'_i = \frac{\partial}{\partial x'} A'_H \frac{\partial u'_i}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} A'_H \frac{\partial u'_i}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'} A'_V \frac{\partial u'_i}{\partial z'}. \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Introduisons le nombre de Rossby R_0 et ceux d'Ekman E_0 et E_H :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 = \frac{U_0}{2\Omega_s L} \\ \\ E_0 = E_V = \frac{A_{V_0}}{2\Omega_s D^2} \\ \\ E_H = \frac{A_{H_0}}{2\Omega_s L^2}. \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Le nombre de Rossby caractérise l'importance relative entre les forces d'inertie et les forces de Coriolis tandis que celui d'Ekman caractérise l'importance relative entre les forces de viscosité turbulente et les forces de Coriolis. En divisant les expressions (3.42₁), (3.42₂), et (3.42₃) par $2\Omega_s U_0$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 \frac{du'}{dt'} = v' \sin \lambda - w' \delta \cos \lambda - \frac{P_0}{2\rho_r L \Omega_s U_0} \frac{\partial p'}{\partial x'} + E_0 \Delta u' \\ \\ R_0 \frac{dv'}{dt'} = -u' \sin \lambda - \frac{P_0}{2\rho_r L \Omega_s U_0} \frac{\partial p'}{\partial y'} + E_0 \Delta v' \\ \\ \delta R_0 \frac{dw'}{dt'} = -\frac{g_0}{2\Omega_s U_0} g' \rho' - u' \cos \lambda - \frac{P_0}{2\rho_r D \Omega_s U_0} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \delta E_0 \Delta w'. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

L'évaluation de R_0 et E_0 avec les échelles caractéristiques de vitesse, et de longueurs horizontale et verticale, donne :

$$\begin{cases} R_0 \approx O(10^{-1}) \\ E_0 \approx O(10^{-1}) \\ \delta = 10^{-3}. \end{cases} \quad (3.46)$$

On néglige les termes multipliés par R_0 et E_0 , et on observe que mis à part le terme de pression qui est d'ordre inconnu dans (3.45₂), que seul le terme de Coriolis est d'ordre 1. En appliquant le principe de moindre dégénérescence, le terme de pression est d'ordre 1, d'où l'on déduit l'échelle de pression :

$$P_0 = 2\Omega_s \rho_r U_0 L. \quad (3.47)$$

En introduisant ce résultat dans (3.45₃), et en la multipliant par δ , on obtient :

$$\delta^2 R_0 \frac{dw'}{dt'} = -\frac{g_0 \delta}{2\Omega_s U_0} g' \rho' - u' \delta \cos \lambda - \frac{\partial p'}{\partial z'} + \delta^2 E_0 \Delta w'. \quad (3.48)$$

En retenant les mêmes ordres de grandeur pour R_0 , E_0 , et δ que précédemment, on observe que mis à part le terme de gravité, qui est d'ordre inconnu, seul le terme de pression est d'ordre 1. Le principe de moindre dégénérescence implique alors que le terme de gravité est d'ordre 1, d'où :

$$g_0 = \frac{2\Omega_s U_0}{\delta}, \quad (3.49)$$

ce qui nous permet d'aboutir aux équations adimensionnelles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \\ R_0 \frac{du'}{dt'} = v' \sin \lambda - w' \delta \cos \lambda - \frac{\partial p'}{\partial x'} + E_0 \Delta u' \\ R_0 \frac{dv'}{dt'} = -u' \sin \lambda - \frac{\partial p'}{\partial y'} + E_0 \Delta v' \\ \delta^2 R_0 \frac{dw'}{dt'} = -g' \rho' - u' \delta \cos \lambda - \frac{\partial p'}{\partial z'} + \delta^2 E_0 \Delta w'. \end{cases} \quad (3.50)$$

L'approximation hydrostatique consiste à négliger les termes multipliés par δ (δ étant un petit paramètre). Ce qui revient à poser $\delta = 0$ dans (3.50₄), et cela se traduit par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \\ R_0 \frac{du'}{dt'} = v' \sin \lambda - \frac{\partial p'}{\partial x'} + E_0 \Delta u' \\ R_0 \frac{dv'}{dt'} = -u' \sin \lambda - \frac{\partial p'}{\partial y'} + E_0 \Delta v' \\ 0 = -g' \rho' - \frac{\partial p'}{\partial z'}. \end{cases} \quad (3.51)$$

CHAPITRE 3. MODÈLE HYDRODYNAMIQUE

Finalement, après avoir fait l'hypothèse du plan β , et l'approximation hydrostatique, pour aboutir au système (3.51), on obtient les équations dimensionnelles hydrodynamiques 3D ($i=1,2$ et $j=1,2,3$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g, \end{array} \right. \quad (3.52)$$

où $\vec{f} = (fv, -fu, 0)$ est la force de Coriolis, $f = 2\Omega_s \sin \lambda$ désigne le coefficient de Coriolis, τ_{ij} représente le tenseur décrivant la turbulence et les effets visqueux.

Chapitre 4

Equations de Saint-Venant

4.1 Hypothèses

Le modèle de ST-VENANT que l'on connaît sous l'appellation de <<Shallow water problem>>, consiste en une intégration des équations (3.52) sur une colonne d'eau H . Il suppose que les trois approximations à savoir l'approximation du plan β , l'approximation hydrostatique et la modélisation de la turbulence, ainsi que l'hypothèse d'un écoulement parfaitement mélangé sont applicables.

4.2 Intégration sur la verticale

Compte tenu des hypothèses précédentes, on introduit les propriétés des opérateurs d'intégration sur la verticale.

En notant f et g deux fonctions intégrables de classe C^2 , on pose $\langle f \rangle$, la moyenne de f sur la profondeur, et on introduit les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f \rangle = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} f dz \\ \langle \lambda f \rangle = \lambda \langle f \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \langle \langle f \rangle g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle \\ \langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \\ f' = f - \langle f \rangle \rightarrow \langle f' \rangle = 0, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où η représente l'élévation de la surface libre de l'eau par rapport à un niveau de référence (ici le niveau moyen de la mer), h est la profondeur de l'eau par rapport

à cette référence, et $H = \eta + h$ désigne la profondeur totale de la colonne d'eau (H n'est pas constante).

4.3 Règle de Leibnitz

Si D représente un opérateur différentiel, par rapport au temps ou aux variables d'espace x et y , et si f est une fonction de classe C^1 quelconque, on a :

$$D \int_{z_1}^{z_2} f dz = \int_{z_1}^{z_2} Df dz + f(z_2) Dz_2 - f(z_1) Dz_1, \quad (4.2)$$

où $z_1(x, y, t)$ et $z_2(x, y, t)$ sont les bornes d'intégration dépendantes éventuellement de x et y .

On notera par $U_i = \langle u_i \rangle$, la valeur moyenne de u_i . On introduira alors les conditions aux limites en surface et au fond rendues nécessaires, par la règle de Leibnitz. Les conditions cinématiques permettent d'obtenir la vitesse à la surface et au fond de l'eau.

- condition à la surface libre :

$$w(z = \eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_{(x,y)} \eta \quad (4.3)$$

- condition au fond :

$$w(z = -h) = - \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_{(x,y)} h \right) \quad (4.4)$$

Les conditions aux limites en surface et au fond pour les contraintes sur la direction z sont données respectivement par :

- $\tau_{iz}(z = \eta) = \tau_{si}$ contrainte de cisaillement à la surface liée à l'action du vent,
- $\tau_{iz}(z = -h) = \tau_{bi}$ contrainte de cisaillement au fond liée au frottement.

L'intégration de l'équation hydrostatique (3.52₃) donne :

$$P(z) = P_a + g\rho_r(\eta - z) + g \int_z^\eta \Delta\rho dz \quad (4.5)$$

avec,

$$P_a = P(\eta). \quad (4.6)$$

L'intégration de l'équation de continuité se fait, en utilisant la règle de Leibnitz, puis la relation d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4.7)$$

comme suit :

En simplifiant (4.15) et en utilisant la règle de Leibnitz, on a (pour $i=1,2$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial HU_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u_i u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u_i v dz + u_i w_{\eta} - u_i w_{-h} \\ -u_{i\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{\eta} - u_{i-h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{-h} = F_i - gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \\ -g \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\eta} \int_z^{\eta} \frac{\Delta \rho}{\rho_r} dz' dz + g \int_{-h}^{\eta} \frac{\Delta \rho}{\rho_r} dz \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_r} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial \tau_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{iy}}{\partial y} \right) dz \\ + \frac{1}{\rho_r} (\tau_{si} - \tau_{bi}). \end{array} \right. \quad (4.16)$$

En considérant les conditions (4.3) et (4.4), et en séparant la partie moyenne de la partie fluctuante sur la verticale ($u_i = U_i + u'_i$) dans les termes de convection, (4.16) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial HU_i}{\partial t} + \frac{\partial HU_i U}{\partial x} + \frac{\partial HU_i V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u'_i u' dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u'_i v' dz = F_i - gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \\ -g \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\eta} \sigma dz + g\sigma(-h) \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_r} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial \tau_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{iy}}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{\rho_r} (\tau_{si} - \tau_{bi}) \end{array} \right. \quad (4.17)$$

avec,

$$\sigma = \int_z^{\eta} \frac{\Delta \rho}{\rho_r} dz' \quad (4.18)$$

représentant les termes de flottabilité.

Si l'on suppose que $\langle \rho \rangle \approx \rho_r$, on peut admettre que $\sigma(-h) \approx 0$, d'où le système d'équations 2D donné par (avec $i = 1, 2$ et $k = 1, 2$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial HU_i}{\partial x_i} = 0 \\ \underbrace{\frac{\partial HU_i}{\partial t} + \frac{\partial U_k HU_i}{\partial x_k}}_I = \underbrace{F_i}_{II} - \underbrace{gH \frac{\partial \eta}{\partial x_i}}_{III} - \underbrace{g \frac{\partial H \langle \sigma \rangle}{\partial x_i}}_{IV} + \underbrace{\frac{(\tau_{si} - \tau_{bi})}{\rho_r}}_V + \\ \underbrace{\frac{\partial H \langle \tau_{ik} \rangle}{\partial x_k}}_{VI} - \underbrace{\frac{\partial H \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial x_k}}_{VII}. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Les termes de l'équation de quantité de mouvement (4.19₂) représentent :

- I les effets inertiels,
- II les effets de Coriolis,

CHAPITRE 4. EQUATIONS DE SAINT-VENANT

- III l'influence du gradient de pression,
- IV le terme de flottabilité $\sigma = \int_z^\eta \frac{\Delta\rho}{\rho_r} dz'$,
- V les effets du vent à la surface et du frottement au fond de l'eau,
- VI les effets visqueux dûs à la turbulence,
- VII le terme de dispersion qui traduit l'influence du profil de vitesse sur l'écoulement moyen.

Chapitre 5

Modélisation de la turbulence

En général, une substance dans un fluide est soumise à deux types de mouvements aléatoires :

- l'agitation thermique (échelle moléculaire),
- la turbulence (échelle macroscopique).

Le mouvement moyen étant macroscopique, une particule de fluide participant au mouvement ne peut se déplacer qu'en poussant une autre qui prend la place laissée vacante par la première.

L'un des effets de la turbulence est le mélange par brassage. Un écoulement fortement turbulent a donc les chances d'être homogène dans la direction où le mélange est le plus important. Dans notre cas, la direction principale de mélange est la verticale.

Un autre effet responsable du premier, est le transfert d'énergie des gros tourbillons générés par l'écoulement vers les petits tourbillons. L'ultime transfert est alors la dissipation d'énergie. Cette vue de la turbulence, appelée cascade d'énergie est due à Kolmogorov-Onsager.

Pour la modélisation de la turbulence, nous nous limiterons à un modèle à zéro équation. Ainsi, nous analyserons quelques modèles de viscosité turbulente horizontale à zéro équation présents dans la littérature. Ceux-ci sont basés sur un modèle de longueur de mélange de Prandtl. Celui-ci suppose que la viscosité turbulente est donnée par :

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u_m}{\partial z} \right| \quad (5.1)$$

où,

$$u_m = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5.2)$$

est la vitesse moyenne de l'écoulement, et l_m représente la longueur de mélange verticale.

Le fluide étant visqueux, les couches de fluide se comportent comme des parois rugueuses. L'écoulement avant d'être turbulent (si on considère l'écoulement de la couche supérieure sur la couche inférieure) est d'abord laminaire, passe par une phase intermédiaire, puis devient turbulent.

Le profil de vitesse étant continu, en faisant le raccordement des différents profils de vitesses correspondants aux différentes étapes, on obtient un profil logarithmique de la vitesse moyenne dans la zone turbulente.

En prenant donc une distribution logarithmique de la vitesse moyenne sur la verticale comme suit :

$$u_m = \frac{u_\tau}{k} \ln(h+z) + cte, \quad (5.3)$$

on obtient :

$$\nu_t = \frac{l_m^2 u_\tau}{k(h+z)}. \quad (5.4)$$

Une moyenne doit être faite sur la verticale, pour obtenir la viscosité cinématique turbulente horizontale A_H :

$$A_H = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \nu_t(z) dz = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{l_m^2 u_\tau}{k(h+z)} \right) dz. \quad (5.5)$$

u_τ est obtenue à partir d'une analyse dimensionnelle faite à partir de la loi de la paroi en écoulement turbulent. Cette loi exprime la vitesse moyenne locale en fonction de la scission τ exercée par la paroi sur le fluide, des propriétés physiques du fluide (masse volumique ρ , viscosité dynamique μ , et de la distance z à la paroi). Elle s'exprime par une relation entre ces cinq paramètres :

$$f(z, \rho, \mu, \tau, u_\tau) = 0. \quad (5.6)$$

L'expérience montre que u_τ et τ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \\ \tau = \frac{\rho g}{C_h} \|\vec{u}\|^2, \end{cases} \quad (5.7)$$

où u_τ est la vitesse de cisaillement à la paroi et \vec{u} la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section droite. Plusieurs relations fournissent A_H , selon le modèle de longueur de mélange choisi. On a :

- modèle de Fischer [29] :

$$A_H = 0.15H u_\tau = \frac{0.15H}{C_h} \sqrt{g} \|\vec{u}\|, \quad (5.8)$$

C_h étant le coefficient de Chézy.

- modèle de Folconer [29] : il utilise la longueur de mélange suivante pour les bassins ouverts (principalement les ports et bassins côtiers) :

$$l_m = k (h + z) \left(1 - \frac{h + z}{H} \right)^{1/2} \quad (5.9)$$

et on obtient :

$$A_H = \frac{k}{6} H u_\tau = \frac{kH}{6C_h} \sqrt{g} \|\vec{u}\|, \quad (5.10)$$

avec k la constante de Karman.

Nous allons retenir la relation (5.10) pour nos calculs, compte tenu de la forme de la lagune que nous étudions, qui a la forme d'un bassin partiellement ouvert.

5.1 Contrainte de cisaillement due au vent à la surface de l'eau et frottement au fond

Le transport turbulent a été éliminé dans l'intégration verticale. Il n'apparaît plus que sous la forme de tension au fond (τ_b) et à la surface (τ_s). Ces contraintes dues à la viscosité (et la viscosité turbulente) résultent d'un écoulement au voisinage d'une paroi. On peut donc lier ces contraintes à la notion de frottement turbulent. C'est pleinement vrai pour ce qui concerne l'écoulement de l'eau au fond, mais pour l'écoulement de l'air à la surface de l'eau, il faut faire l'hypothèse que la variation de la hauteur d'eau reste inférieure à la hauteur de rugosité de la couche limite atmosphérique.

Nous allons, pour expliciter cela, introduire l'écoulement pariétal, et par la suite faire le parallèle avec l'écoulement de l'eau sur le fond et celui de l'air à la surface de l'eau.

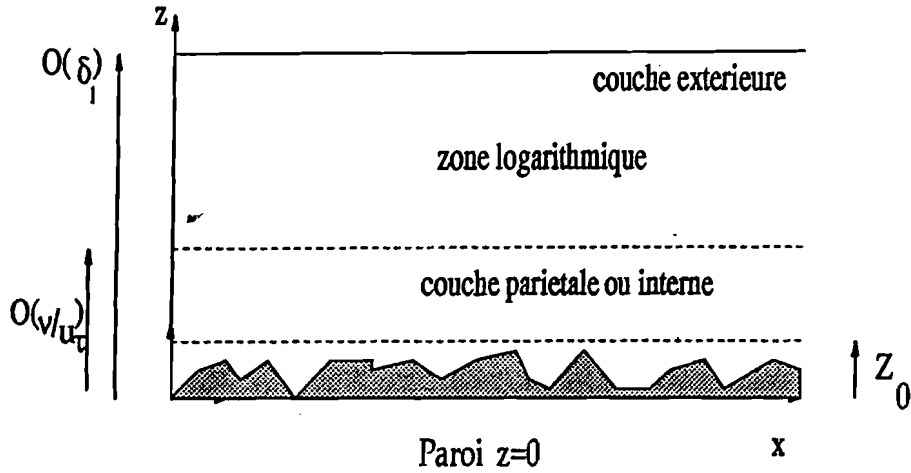


Figure 7 : Schéma d'une couche limite avec zone pariétale

Dans un fluide visqueux, la présence de la paroi impose une condition d'adhérence à la paroi. Celle-ci résulte d'un effet de frottement qui impose la nullité de la vitesse relative à la paroi, indépendamment de la viscosité cinématique.

Cette contrainte implique l'existence d'une longueur caractéristique normale à la paroi de la zone où les effets de viscosité dominent. Cette longueur caractéristique L_τ liée à la vitesse de frottement et à la viscosité, représente la dimension de la couche pariétale ($L_\tau = \nu/u_\tau$).

La projection du vecteur contrainte, liée à la normale à la paroi :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho_\tau \overline{u'_i u'_j} \quad (5.11)$$

s'écrit,

$$\begin{cases} \tau_{ij} \cdot n_j & \text{avec } j = z, \\ \tau_{ij} \cdot n_j & = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \rho_\tau \overline{u'w'} \end{cases} \quad (5.12)$$

soit,

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \rho_\tau \overline{u'w'}. \quad (5.13)$$

L'adhérence à la paroi impose que sur celle-ci on a :

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \overline{u'w'} = 0 \quad (5.14)$$

de sorte que,

$$\tau_p = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \rho u_\tau^2, \quad (5.15)$$

car nous avons vu précédemment que $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$.

Cette contrainte permet de définir la vitesse de frottement susceptible de caractériser la turbulence dans la couche limite ($\nu/u_\tau < z < \delta_l$).

Le gradient vertical de vitesse moyenne \bar{u} , dans cette couche, peut s'exprimer pour une turbulence pleinement développée, de la manière suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{1}{k} \frac{u_\tau}{z} \quad (5.16)$$

où,

$$\nu_\tau = k u_\tau z \quad (5.17)$$

est un modèle de viscosité turbulente de KAJIURA. Ce qui fait apparaître après intégration, l'existence d'une zone logarithmique :

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{k} \log \frac{z}{z_0}, \quad (5.18)$$

où z_0 est la hauteur de rugosité de la paroi et k , la constante de Karman ($k = 0.41$).

La contrainte est alors liée à l'énergie cinétique par une relation faisant intervenir un coefficient multiplicatif adimensionnelle, faisant état d'une dissipation d'énergie ; Ce coefficient est obtenu en divisant la contrainte par la pression dynamique $\rho \frac{U_d^2}{2}$ dans l'écoulement libre, ce qui donne donc :

$$\tau_p = \rho \frac{C_f}{2} U_d^2. \quad (5.19)$$

C_f est le coefficient de frottement de Darcy et U_d la vitesse dans l'écoulement libre.

On notera de façon générale :

$$\tau_p = \rho \frac{C_f}{2} U_d |U_d|, \quad (5.20)$$

ce qui donne en 3D :

$$\vec{\tau}_p = \rho \frac{C_f}{2} \|\vec{U}\| \vec{U}. \quad (5.21)$$

5.1.1 Modèle de frottement au fond de l'eau

Le modèle d'écoulement de paroi ci-dessus s'applique directement à l'écoulement hydrodynamique sur le plateau continental, dans les estuaires et les rivières, et permet donc d'écrire la contrainte de cisaillement au fond sous la forme (5.21). Nous allons présenter alors quelques modèles de coefficients de frottement permettant d'obtenir la contrainte de cisaillement.

- Formule de Schlichting :

$$C_f = 0.027 \left(\frac{\nu}{uR_h} \right)^{1/4}, \quad (5.22)$$

où R_h est le rayon hydraulique. Cette expression a été écrite pour les écoulements en canal où les fonds sont réguliers, et ne s'applique pas aux autres cas.

- Formule de Chézy (1769) :

$$C_f = \frac{2g}{C_h^2}. \quad (5.23)$$

C_f représente le coefficient de Darcy, il dépend de la rugosité des parois et, varie de 40 pour une paroi rugueuse à 100 pour une paroi lisse. C_h est le coefficient de frottement de Chézy.

- Formule de Manning(1889)-Strickler (1923) :

Ces auteurs ont montré que le coefficient de chézy est uniquement fonction du rayon hydraulique.

$$\begin{cases} C_h = K_s R_h^{1/6} \\ K_s = 1/n_a \end{cases}, \quad (5.24)$$

où K_s est le coefficient de Strickler, n_a celui de Manning et R_h le rayon hydraulique (ici égal à la colonne d'eau H). Ces coefficients sont fonctions de la rugosité. On a ci-dessous quelques exemples de K_s en U.S.I.

TYPE DE FOND	K_s
très unis, ciment, bois, bois raboté	80 à 100
maçonnerie fine, béton, pierre de taille	60 à 80
gravier fin, sable, maçonnerie grossière	50
gravier grossier	35 à 45
roches moyennes	20 à 30
roches grossières	15 à 20
terrains naturels, végétations	7 à 13

Tableau 4 : Coefficient de Strickler en fonction du type de fond

- Formule de Colebrook-White :

Colebrook-White propose une autre formulation du coefficient de Chézy :

$$\begin{cases} C_h = \left(\frac{2g}{C_f}\right)^{1/2} = -\sqrt{32}g \log_{10} \left(\frac{K_n}{14.84H} + \frac{1.255C_h}{4\|\vec{U}\|H\sqrt{2g/\nu}} \right) \\ K_n = \left(\frac{25}{K_s}\right)^6 \end{cases}, \quad (5.25)$$

K_n représente la hauteur de rugosité du fond de Nikuradse.

Les sédiments dans la lagune sont essentiellement des sables fins vaseux, d'origine continentale, apportés par les eaux des fleuves et rivières au moment de leurs crues [51]. Nous prendrons pour cela pour nos calculs K_s (coefficient de Strickler) égal à 50, et nous choisirons la relation (5.23) pour déterminer le coefficient de frottement de Darcy.

5.1.2 Modèle de frottement à la surface de l'eau

Les mouvements de l'eau sont plus lents que ceux de l'air. Le fluide atmosphérique voit donc la surface de l'eau comme une paroi rugueuse de hauteur de rugosité z_0 . La partie atmosphérique proche de la surface de l'eau s'apparente donc à un écoulement de paroi. En conséquence, on peut lui appliquer la loi de paroi vue précédemment (5.21), et introduire la contrainte de frottement de l'air à la surface de l'eau.

$$\vec{\tau}_s (\tau_{sx}, \tau_{sy}, 0) = \rho_a \frac{C_z}{2} \|\vec{w}_z\| \vec{w}_z \quad (5.26)$$

où, \vec{w}_z est la vitesse du vent à la distance z de la surface libre de l'eau, ρ_a est la masse volumique de l'air, C_z est le coefficient de frottement de l'air à la distance z de la surface de l'eau.

Présentons ici quelques formules permettant de déterminer C_z .

- La formule de base :

la formule de base pour l'obtention de C_z est obtenue en liant la hauteur de rugosité z_0 définie par Charnock, à la vitesse de frottement u_τ par :

$$\begin{cases} z_0 = au_\tau^2/g \\ u_\tau = \sqrt{\|\vec{\tau}_w\|/\rho_a} \end{cases}, \quad (5.27)$$

où a est le coefficient de Charnock et $\vec{\tau}_w$ est la contrainte tangentielle du vent à la surface libre de l'eau.

En couplant le profil logarithmique (5.18), et la hauteur de rugosité (5.27), Wu trouve :

$$\begin{cases} C_z/2 = \left(\frac{k}{\ln(C_z F_z^2/2a)} \right)^2 \\ F_z = \frac{\|\vec{w}_z\|}{(gz)^{1/2}} \end{cases} \quad (5.28)$$

F_z est de la forme du nombre de Froude, z est l'altitude du point de mesure de la vitesse \vec{w}_z ($z = 10$ m en général).

- Formule de Wu :

De manière conventionnelle et, pour des raisons purement opérationnelles, la hauteur de mesure de la vitesse du vent est prise à $z = 10$ m, car à cette distance, on suppose qu'elle est uniforme. Et on a :

$$C_{10}/2 = (0.8 + 0.065 \|\vec{w}_{10}\|) \quad (5.29)$$

5.2 Modélisation des termes de dispersion

Pour prendre en compte les variations au fond, nous allons donner une approximation du tenseur de dispersion par la méthode de correction d'advection.

Elle consiste à imposer un profil de vitesse sur la verticale. On respecte alors globalement l'écoulement et on peut donner une approximation du tenseur de dispersion. Pour cela, on cherche à relier directement le tenseur de convection $\langle u_i u_j \rangle$ moyenné au tenseur des valeurs moyennes $U_i U_j$ par l'intermédiaire d'un coefficient de correction comme suit :

$$\langle u_i u_j \rangle = \beta U_i U_j. \quad (5.30)$$

Dronker [29], utilise un profil V_p lié à une vitesse caractéristique V_1 (vitesse moyenne) de l'écoulement.

On pose :

$$\begin{cases} V_p = V_1 (z + h)^{1/q} \text{ avec } q \in \mathbb{N}^* \\ u = V_p \cos \alpha \\ v = V_p \sin \alpha, \quad (\text{dans le plan horizontal}) \end{cases} \quad (5.31)$$

avec α , l'angle que fait le vecteur vitesse de l'écoulement avec l'axe des x .

En calculant $\langle u_i u_j \rangle$ et $U_i U_j$ et en les comparant, c'est à dire en utilisant les moyennes de Reynolds, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle u_i u_j \rangle &= \frac{1}{H} V_1^2 \cos \alpha \sin \alpha \int_{-h}^{\eta} (z+h)^{2/q} dz \\ &= \frac{1}{H} V_1^2 \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{q}{q+2} \right) \left[(z+h)^{(2+q)/q} \right]_{-h}^{\eta} \\ &= \frac{1}{H} V_1^2 \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{q}{q+2} \right) \left[(\eta+h)^{\frac{2+q}{q}} \right] \\ &= \frac{1}{H} V_1^2 \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{q}{q+2} \right) \left[(H)^{2/q} \right]. \end{aligned} \right. \quad (5.32)$$

On a aussi :

$$\left\{ \begin{aligned} U_i &= \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} V_1 \cos \alpha (z+h)^{\frac{1}{q}} dz \\ &= \frac{V_1 \cos \alpha}{H} \left(\frac{q}{q+1} \right) \left[(z+h)^{\frac{q+1}{q}} \right]_{-h}^{\eta} \\ &= \frac{V_1 \cos \alpha}{H} \left(\frac{q}{q+1} \right) H^{\frac{q+1}{q}} \end{aligned} \right. \quad (5.33)$$

et,

$$U_j = \frac{V_1 \sin \alpha}{H} \left(\frac{q}{q+1} \right) H^{\frac{q+1}{q}}. \quad (5.34)$$

Le produit $U_i U_j$ donne :

$$U_i U_j = \frac{V_1^2}{H^2} \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{q}{q+1} \right)^2 H^{\frac{2(q+1)}{q}}, \quad (5.35)$$

soit

$$U_i U_j = V_1^2 \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{q}{q+1} \right)^2 H^{\frac{2}{q}}. \quad (5.36)$$

En faisant le rapport de $\langle u_i u_j \rangle$ et $U_i U_j$ quels que soient i et j , on obtient :

$$\left(\frac{(q+1)^2}{q(q+2)} \right), \quad (5.37)$$

ce qui donne bien :

$$\left(1 + \frac{q}{q(q+2)} \right). \quad (5.38)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\langle u_i u_j \rangle = \left(1 + \frac{q}{q(q+2)} \right) U_i U_j. \quad (5.39)$$

En pratique, on prend q allant de 5 à 9. Pour $q = 5$, on a $\beta = 1.01$. Folconer, quant à lui, utilise un profil logarithmique de la couche limite de la forme :

$$V_p = \frac{u_\tau}{k} \ln \left(\frac{h + z_0 + z}{z_0} \right) \quad (5.40)$$

et obtient

$$\langle u_i u_j \rangle = \left(1 + \frac{g}{k^2 C_h^2} \right) U_i U_j = \beta U_i U_j, \quad (5.41)$$

où z_0 , u_τ et k sont respectivement la hauteur de rugosité de la couche limite, la vitesse de frottement, et la constante de Karman.

La deuxième relation (5.41) paraît mieux adaptée car la correction d'advection est fonction du frottement, qui lui est le principal responsable de la fluctuation de la vitesse sur la verticale.

Il faut noter qu'on a :

$$\begin{cases} u_i = U_i + u'_i \\ u_j = U_j + u'_j. \end{cases} \quad (5.42)$$

On a alors,

$$\begin{cases} \langle u_i u_j \rangle = \langle (U_i + u'_i) \rangle \langle (U_j + u'_j) \rangle \\ = \langle U_i U_j \rangle + \langle U_i u'_j \rangle + \langle u'_i U_j \rangle + \langle u'_i u'_j \rangle \\ = U_i U_j + \langle u'_i u'_j \rangle. \end{cases} \quad (5.43)$$

En exprimant $\langle u'_i u'_j \rangle$ comme suit,

$$\langle u'_i u'_j \rangle = \langle u_i u_j \rangle - U_i U_j \quad (5.44)$$

et en utilisant la relation (5.41), on obtient :

$$\langle u'_i u'_j \rangle = (\beta - 1) U_i U_j. \quad (5.45)$$

En introduisant la relation (5.45) dans les équations (4.19), nous aboutissons aux formulations suivantes :

- formulation débit unitaire-dénivellation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{Div}(\vec{Q}) = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial t} + \beta \text{Div}(\vec{U} \cdot Q_x) - \text{Div} \left(A_H \vec{\nabla}_{(x,y)} Q_x \right) + gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - f Q_y + \frac{\tau_{bx} - \tau_{sx}}{\rho_r} = 0 \\ \frac{\partial Q_y}{\partial t} + \beta \text{Div}(\vec{U} \cdot Q_y) - \text{Div} \left(A_H \vec{\nabla}_{(x,y)} Q_y \right) + gH \frac{\partial \eta}{\partial y} + f Q_x + \frac{\tau_{by} - \tau_{sy}}{\rho_r} = 0 \end{array} \right. \quad (5.46)$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \left(1 + \frac{g}{k^2 C_h^2}\right) \text{ le coefficient de correction d'advection,} \\ \vec{Q} \left| \begin{array}{l} Q_x = HU \\ Q_y = HV \end{array} \right. \text{ les débits unitaires selon les axes Ox et Oy.} \end{array} \right. \quad (5.47)$$

- formulation vitesse-dénivellation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} + Div(H\vec{U}) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \beta (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}_{(x,y)}) U - Div(A_H \vec{\nabla}_{(x,y)} U) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - fV + \frac{\tau_{bx} - \tau_{sx}}{\rho_r H} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \beta (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}_{(x,y)}) V - Div(A_H \vec{\nabla}_{(x,y)} V) + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + fU + \frac{\tau_{by} - \tau_{sy}}{\rho_r H} = 0 \end{array} \right. \quad (5.48)$$

Troisième partie
RESOLUTION NUMERIQUE

Chapitre 6

Résolution numérique des équations de Saint-Venant en 2D par la méthode des éléments finis

6.1 Généralités

La résolution numérique des équations (5.48) par la méthode des éléments finis consiste de façon générale à trouver une inconnue I satisfaisant à un certain nombre d'équations différentielles :

$$A(I) = \left\{ \begin{array}{c} A_1(I) \\ A_2(I) \\ \vdots \\ \vdots \\ A_n(I) \end{array} \right\} = 0 \quad (6.1)$$

à l'intérieur d'un domaine (volumique, surfacique, ...), et à un certain nombre de conditions associées :

$$B(I) = \left\{ \begin{array}{c} B_1(I) \\ B_2(I) \\ \vdots \\ \vdots \\ B_n(I) \end{array} \right\} = 0 \quad (6.2)$$

le long des frontières Γ du domaine.

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

La fonction I peut être un scalaire ou représenter un vecteur de plusieurs variables. L'approche par éléments finis est un procédé d'approche qui consiste à chercher la solution sous la forme :

$$I = \sum_{i=1}^r N_i I_i, \quad (6.3)$$

où les N_i sont des fonctions d'interpolation, définies à l'aide de variables indépendantes (x, y , etc...). Elles sont choisies de façon à définir de manière unique le champ des inconnues à l'intérieur de chaque "élément fini" en fonction de celles de ses noeuds, et les paramètres I_i sont tous inconnus ou seulement quelques uns sont connus. r désigne le nombre de noeuds sur chaque élément.

6.2 Les principales étapes de la méthode

La méthode consiste en :

- 1) la discrétisation du problème : discrétisation des inconnues, discrétisation du domaine par sélection d'éléments interconnectés en des noeuds (maillage),
- 2) l'évaluation des matrices élémentaires,
- 3) la construction des matrices globales et du vecteur des inconnues,
- 4) l'application des conditions aux limites,
- 5) la résolution du système d'équations résultant, et au calcul des autres inconnues fonctions des inconnues du problème.

6.2.1 Discrétisation du problème

Discrétisation du domaine

Nous allons dans un premier temps, pour caler notre modèle, considérer la rade d'Abidjan. Les limites de cette zone d'étude sont (voir figure 8) :

- au Nord de l'île Bouley, de façon linéaire, de la borne B76 à la borne B12 (du PAA),
- au Sud de l'île Bouley, de façon linéaire de la borne B279 à la borne B388,
- à la sortie du canal de Vridi (côté lagune) , précisément 50 m après le marégraphe du Fascinage,
- dans le prolongement du pont Houphouet-Boigny,
- entre la marine nationale et le quai bananier.

Ces limites sont désignées par Γ_1 et Γ_2 .

- Γ_1 représente les frontières solides. C'est la terre qui entoure la lagune,
- Γ_2 désigne les frontières liquides. C'est la zone de contact entre les parties extérieures de lagune à la zone d'étude, et la zone d'étude.

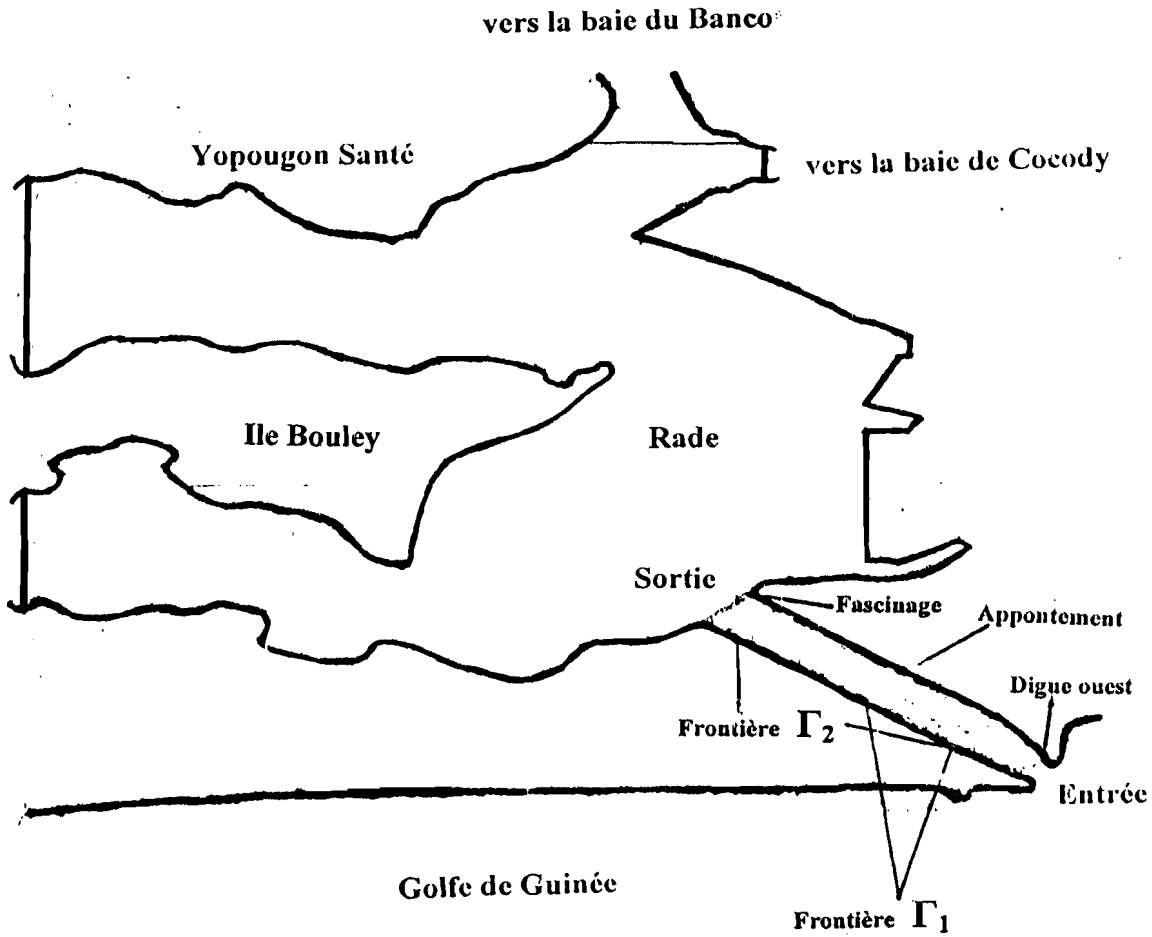


Figure 8 : Domaine d'étude et ses différentes limites

Choix du maillage

La discrétisation du domaine consiste donc à subdiviser la zone étudiée en de petits éléments appelés <<éléments fins>>. Pour la résolution de notre problème, notre choix portera sur les éléments triangulaires à trois noeuds. En effet, ces éléments permettent d'avoir des fonctions d'interpolation (nous utiliserons des fonctions polynômes) qui satisfont les critères d'admissibilité et de complétude, qui sont des critères de convergence.

- L'admissibilité implique la continuité des variables inconnues uniquement entre éléments ou la continuité C_0 .

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

- La complétude implique que lorsque les éléments tendent à être infiniment petits, et que les dérivées dans la formulation faible tendent à être constantes (ou en particulier zéro), la forme doit représenter cette condition de constance des dérivées.

Si ces conditions sont satisfaites, la solution converge vers la solution exacte puisque le nombre total d'éléments croît. Dans la famille des triangles, le nombre de noeuds de chacun des éléments est tel qu'il permet de représenter la fonction inconnue par un polynôme complet dont le degré est justement celui nécessaire pour assurer la compatibilité entre élément. Cela découle de la comparaison avec le triangle de Pascal dans lequel on voit que le nombre de noeuds coïncide exactement avec le nombre nécessaire de termes polynômiaux.

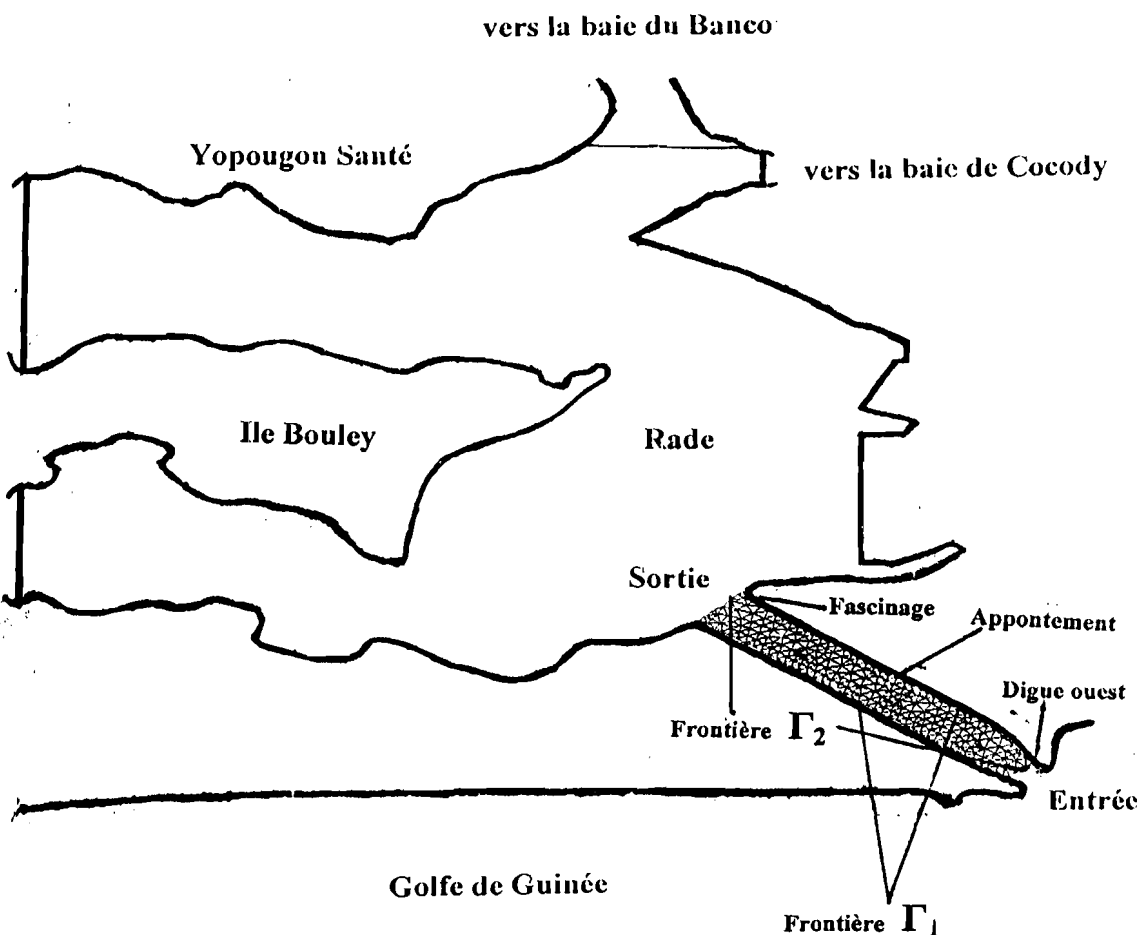


Figure 9 : Figure présentant le maillage par éléments triangulaires à trois noeuds

Discrétisation des variables

Les équations de St-VENANT

Les équations que nous allons discrétiser par la méthode des éléments finis, sont celles de St-VENANT. Elles sont données en 2D par les équations en formulation vitesse-dénivellation suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \\ \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \beta \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \\ - fV + \frac{\tau_{bx} - \tau_{sx}}{\rho_r H} = 0 \quad (6.4) \\ \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \beta \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] + g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \\ + fU + \frac{\tau_{by} - \tau_{sy}}{\rho_r H} = 0, \end{array} \right.$$

où U , V représentent respectivement les composantes du vecteur vitesse dans les directions Ox et Oy ;

η désigne l'élévation de la surface de l'eau par rapport au niveau moyen de l'eau (c'est le plan de référence) ;

$H = \eta + h$, H est la profondeur totale de l'eau et h , la profondeur en partant du plan de référence (voir figure 6) ;

τ_b et τ_s sont les contraintes au fond et à la surface de l'eau ;

f est le coefficient de Coriolis ;

β est le coefficient de correction d'advection ;

A_H représente le coefficient de viscosité turbulente.

Les conditions aux limites

Sur les frontières Γ_1 (eau/berge) : nous fixons les débits unitaire normal et tangentiel (q étant le débit unitaire ; l'indice n est lié à la composante normale et s à la composante tangentielle), de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n = \bar{q}_n \\ q_s = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (6.5)$$

avec q_n le débit unitaire normal, q_s le débit unitaire tangentiel et \bar{q}_n un débit unitaire normal donné (traversant la frontière Γ_1 , ici $\bar{q}_n = 0$).

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Sur les frontières Γ_2 (eau/eau) : on a les forces de viscosité turbulente normale et tangentielle (ce sont les projections des forces de viscosité turbulente dans le repère (M, \vec{n}, \vec{s}) lié à la frontière ; M appartenant à la frontière) telles que :

$$\begin{cases} N_{nn} = \bar{N}_{nn} \\ N_{ns} = \bar{N}_{ns} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_2 \quad (6.6)$$

avec,

$$\begin{cases} N_{nn} = \alpha_{nx}N_{nx} + \alpha_{ny}N_{ny} \\ N_{ns} = -\alpha_{ny}N_{nx} + \alpha_{nx}N_{ny} \end{cases} \quad (6.7)$$

et,

$$\begin{cases} \begin{cases} N_{nx} = \alpha_{nx}N_x + \alpha_{ny}N_{xy} \\ N_{ny} = \alpha_{nx}N_{yx} + \alpha_{ny}N_y \end{cases} \\ \begin{cases} N_x = A_H \frac{\partial U}{\partial x} ; & N_y = A_H \frac{\partial V}{\partial y} \\ N_{xy} = A_H \frac{\partial U}{\partial y} ; & N_{yx} = A_H \frac{\partial V}{\partial x}. \end{cases} \end{cases} \quad (6.8)$$

Nous avons :

$$\begin{cases} \alpha_{nx} = \cos(n, x) \\ \alpha_{ny} = \cos(n, y). \end{cases} \quad (6.9)$$

Considérons un élément de surface dS de la frontière Γ_2 . Les figures 10a et 10b nous indiquent les forces de viscosité N_x , N_y , N_{xy} , et N_{yx} , et leurs différentes projections N_{nx} , N_{ny} , N_{nn} et N_{ns} dans un repère (M, \vec{n}, \vec{s}) , lié à la frontière Γ_2 ; (M étant un point considéré sur Γ_2). \bar{N}_{nn} et \bar{N}_{ns} sont des forces connues et constituent les valeurs aux limites sur les frontières Γ_2 . α_{nx} et α_{ny} dans l'expression (6.9) sont les projections de la normale extérieure à la frontière respectivement dans les directions Ox et Oy.

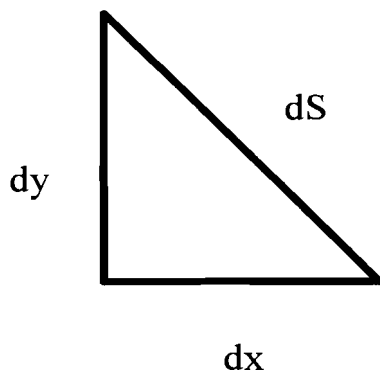


Figure 10a : Elément de surface dS

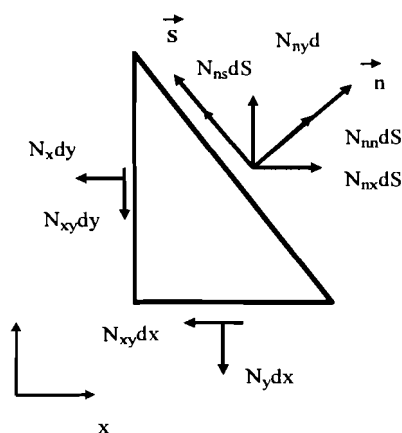


Figure 10b : Représentation des forces de viscosité et de leurs projections dans le repère lié à la frontière

Discretisation spatiale des variables

Les variables sont approchées de la manière suivante :

$$\begin{cases} U = \xi_1 U_1 + \xi_2 U_2 + \xi_3 U_3 = \Phi^T \mathbf{U}^n \\ V = \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2 + \xi_3 V_3 = \Phi^T \mathbf{V}^n \\ \eta = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 = \Phi^T \boldsymbol{\eta}^n \end{cases} \quad (6.10)$$

Il faut signaler que (n) ici n'est pas un exposant, mais désigne les numéros 1, 2 et 3 des noeuds liés à un élément triangulaire (nous travaillons avec des triangles à trois noeuds) et (T) désigne la transposée d'un vecteur. Les vecteurs Φ , \mathbf{U}^n , \mathbf{V}^n et $\boldsymbol{\eta}^n$ s'écrivent respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U}^n = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{V}^n = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}^n = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix}. \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Les composantes ξ_i sont des coordonnées barycentriques, elles sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \frac{1}{2A} (c_1 + b_1x + a_1y) \\ \xi_2 = \frac{1}{2A} (c_2 + b_2x + a_2y) \\ \xi_3 = \frac{1}{2A} (c_3 + b_3x + a_3y), \end{array} \right. \quad (6.12)$$

où A désigne l'aire d'un triangle. Les coefficients a_i, b_i, c_i et A s'obtiennent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = x_k - x_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_j y_k - x_k y_j \\ A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \end{array} \right. \quad (6.13)$$

avec $\{i, j, k\} = \{(1, 2, 3); \{2, 3, 1\}; \{3, 1, 2\}\}$.

Notons que pour une fonction $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} b_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \frac{1}{2A} a_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i}. \end{array} \right. \quad (6.14)$$

Ce qui nous donne pour les différentes variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2A} \mathbf{b}^T \mathbf{U}^n \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2A} \mathbf{a}^T \mathbf{U}^n \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2A} \mathbf{b}^T \mathbf{V}^n \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{2A} \mathbf{a}^T \mathbf{V}^n \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2A} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\eta}^n \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2A} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\eta}^n \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.15)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta U}{\partial x} = \frac{1}{2A} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{U}^n \\ \frac{\partial \delta U}{\partial y} = \frac{1}{2A} \mathbf{a}^T \delta \mathbf{U}^n \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta V}{\partial x} = \frac{1}{2A} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{V}^n \\ \frac{\partial \delta V}{\partial y} = \frac{1}{2A} \mathbf{a}^T \delta \mathbf{V}^n \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} = \frac{1}{2A} \mathbf{b}^T \delta \boldsymbol{\eta}^n \\ \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} = \frac{1}{2A} \mathbf{a}^T \delta \boldsymbol{\eta}^n \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.16)$$

6.2.2 Formulation intégrale

La formulation intégrale utilisée est celle des résidus pondérés. Prenons d'abord l'équation de continuité (6.4₁) qui s'écrit

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (HU) + \frac{\partial}{\partial y} (HV) = 0. \quad (6.17)$$

Nous pouvons écrire :

$$\iint_A \delta \eta \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (HU) + \frac{\partial}{\partial y} (HV) \right] dA = 0 \quad (6.18)$$

ou encore,

$$\iint_A \delta \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} dA + \iint_A \delta \eta \frac{\partial}{\partial x} (HU) dA + \iint_A \delta \eta \frac{\partial}{\partial y} (HV) dA = 0. \quad (6.19)$$

La formule de Green nous donne l'expression ci-après,

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \delta \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} dA - \iint_A (HU) \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} dA + \int_{\Gamma} \delta \eta (HU) n_x d\Gamma \\ - \iint_A (HV) \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} dA + \int_{\Gamma} \delta \eta (HV) n_y d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (6.20)$$

Récrivons l'expression (6.20) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \delta\eta \frac{\partial\eta}{\partial t} dA - \iint_A \left[(HU) \frac{\partial\delta\eta}{\partial x} + (HV) \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} \right] dA \\ \quad + \int_{\Gamma} \delta\eta [(HU) n_x + (HV) n_y] d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (6.21)$$

Désignons par :

$$q_n = [(HU) n_x + (HV) n_y], \quad (6.22)$$

avec n_x et n_y les composantes de la normale à la frontière respectivement dans les directions Ox et Oy.

Les conditions aux limites nous permettent d'écrire finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \delta\eta \frac{\partial\eta}{\partial t} dA - \iint_A \left[(HU) \frac{\partial\delta\eta}{\partial x} + (HV) \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} \right] dA \\ \quad + \int_{\Gamma_1} \delta\eta \bar{q}_n d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \delta\eta q_n d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (6.23)$$

On pose pour la suite :

$$\delta\eta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1. \quad (6.24)$$

L'équation (6.23) devient :

$$\iint_A \delta\eta \frac{\partial\eta}{\partial t} dA - \iint_A \left[\frac{\partial\delta\eta}{\partial x} (HU) + \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} (HV) \right] dA + \int_{\Gamma_2} \delta\eta \bar{q}_n d\Gamma = 0. \quad (6.25)$$

Nous procédons de la même manière pour obtenir les formulations intégrales des équations de quantité de mouvement (6.4₂) et (6.4₃). Nous avons donc la forme intégrale de l'équation (6.4₂) qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \delta U \frac{\partial U}{\partial t} dA + \iint_A \delta U \beta \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA + \\ \iint_A \frac{\partial \delta U}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial x} \right) dA - \int_{\Gamma} \delta U \left(A_H \frac{\partial U}{\partial x} \right) n_x d\Gamma + \\ \iint_A \frac{\partial \delta U}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA - \int_{\Gamma} \delta U \left(A_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) n_y d\Gamma + \\ \iint_A \delta U g \frac{\partial \eta}{\partial x} dA - \iint_A \delta U f V dA + \\ \iint_A \delta U \frac{\tau_{bx} - \tau_{xy}}{\rho_r H} dA = 0, \end{array} \right. \quad (6.26)$$

ou encore,

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \delta U \frac{\partial U}{\partial t} dA + \iint_A \delta U \beta \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA + \\ \left[\iint_A \frac{\partial \delta U}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial x} \right) dA + \iint_A \frac{\partial \delta U}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA \right] + \\ \iint_A \delta U g \frac{\partial \eta}{\partial x} dA - \iint_A \delta U f V dA + \\ \iint_A \delta U \frac{\tau_{bx} - \tau_{sx}}{\rho_r H} dA - \int_{\Gamma} \delta U (n_x N_x + n_y N_{xy}) d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Posons :

$$N_{nx} = [n_x N_x + n_y N_{xy}]. \quad (6.28)$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \delta U \frac{\partial U}{\partial t} dA + \iint_A \delta U \beta \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA + \\ \left[\iint_A \frac{\partial \delta U}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial x} \right) dA + \iint_A \frac{\partial \delta U}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA \right] + \\ \iint_A \delta U g \frac{\partial \eta}{\partial x} dA - \iint_A \delta U f V dA + \iint_A \delta U \frac{\tau_{bx} - \tau_{sx}}{\rho_r H} dA - \\ \int_{\Gamma_1} \delta U N_{nx} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta U \bar{N}_{nx} d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (6.29)$$

On pose aussi :

$$\delta U = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1. \quad (6.30)$$

Finalement, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \delta U \frac{\partial U}{\partial t} dA + \iint_A \delta U \beta \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA + \\ \left[\iint_A \frac{\partial \delta U}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial x} \right) dA + \iint_A \frac{\partial \delta U}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA \right] + \iint_A \delta U g \frac{\partial \eta}{\partial x} dA \\ - \iint_A \delta U f V dA + \iint_A \delta U \frac{\tau_{bx} - \tau_{sx}}{\rho_r H} dA - \int_{\Gamma_2} \delta U \bar{N}_{nx} d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (6.31)$$

De même, on a pour l'équation (6.4₃) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \delta V \frac{\partial V}{\partial t} dA + \iint_A \delta V \beta \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) dA + \\ \left[\iint_A \frac{\partial \delta V}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial V}{\partial x} \right) dA + \iint_A \frac{\partial \delta V}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial V}{\partial y} \right) dA \right] + \\ \iint_A \delta V g \frac{\partial \eta}{\partial y} dA + \iint_A \delta V f U dA + \\ \iint_A \delta V \frac{\tau_{by} - \tau_{sy}}{\rho_r H} dA - \int_{\Gamma_2} \delta V \bar{N}_{ny} d\Gamma = 0 \end{array} \right. \quad (6.32)$$

en posant

$$\delta V = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1. \quad (6.33)$$

Remplaçons maintenant dans les équations (6.25), (6.31) et (6.32), les variables inconnues par leur expression discrétisée (6.10), (6.15) et (6.16) vue un peu plus loin. Ainsi, nous avons pour l'équation (6.25) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \Phi^T \delta \eta^n \Phi^T \frac{\partial \eta^n}{\partial t} dA - h \left[\iint_A \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} \delta \eta^n \Phi^T \mathbf{U}^n dA + \iint_A \frac{\partial \Phi^T}{\partial y} \delta \eta^n \Phi^T \mathbf{V}^n dA \right] \\ - \left[\iint_A \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} \delta \eta^n \Phi^T \mathbf{U}^n dA + \iint_A \frac{\partial \Phi^T}{\partial y} \delta \eta^n \Phi^T \mathbf{V}^n dA \right] \Phi^T \eta^n + \int_{\Gamma_2} \Phi^T \delta \eta^n \bar{q}_n d\Gamma = 0 \end{array} \right. \quad (6.34)$$

soit,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta \eta^n)^T \left\{ \iint_A \Phi \Phi^T \frac{\partial \eta^n}{\partial t} dA - h \left[\frac{1}{2A} \iint_A \mathbf{b} \Phi^T \mathbf{U}^n dA + \frac{1}{2A} \iint_A \mathbf{a} \Phi^T \mathbf{V}^n dA \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{2A} \iint_A \mathbf{b} \Phi^T \mathbf{U}^n dA + \frac{1}{2A} \iint_A \mathbf{a} \Phi^T \mathbf{V}^n dA \right] \Phi^T \eta^n \right\} + (\delta \eta^n)^T \int_{\Gamma_2} \Phi \bar{q}_n d\Gamma = 0 \end{array} \right. \quad (6.35)$$

ou encore,

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_A \Phi \Phi^T dA \frac{\partial \eta^n}{\partial t} - \frac{h}{2A} \left[\iint_A \mathbf{b} \Phi^T dA \mathbf{U}^n + \iint_A \mathbf{a} \Phi^T dA \mathbf{V}^n \right] \\ - \frac{1}{2A} \left[\mathbf{b} \mathbf{U}^{n,T} \iint_A \Phi \Phi^T dA + \mathbf{a} \mathbf{V}^{n,T} \iint_A \Phi \Phi^T dA \right] \eta^n + \int_{\Gamma_2} \Phi \bar{q}_n d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (6.36)$$

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Nous avons aussi, pour l'équation (6.31) :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_A \Phi^T \delta \mathbf{U}^n \Phi^T \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} dA + \beta \iint_A \Phi^T \delta \mathbf{U}^n \left(\Phi^T \mathbf{U}^n \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} \mathbf{U}^n + \Phi^T \mathbf{V}^n \frac{\partial \Phi^T}{\partial y} \mathbf{U}^n \right) dA + \\ & \left[\iint_A \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} \delta \mathbf{U}^n \left(A_H \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} \mathbf{U}^n \right) dA + \iint_A \frac{\partial \Phi^T}{\partial y} \delta \mathbf{U}^n \left(A_H \frac{\partial \Phi^T}{\partial y} \mathbf{U}^n \right) dA \right] \\ & + g \iint_A \Phi^T \delta \mathbf{U}^n \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} \boldsymbol{\eta}^n dA - f \iint_A \Phi^T \delta \mathbf{U}^n \Phi^T \mathbf{V}^n dA + \frac{\tau_{bx} - \tau_{sx}}{\rho_r H} \iint_A \Phi^T \delta \mathbf{U}^n dA \\ & - \bar{N}_{nx} \int_{\Gamma_2} \Phi^T \delta \mathbf{U}^n d\Gamma = 0 \end{aligned} \right. \quad (6.37)$$

ou encore, puisque $\delta \mathbf{U}^n$ est arbitraire et \mathbf{U}^n indépendante des variables d'espace,

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_A \Phi \Phi^T dA \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + \frac{\beta}{2A} \left[\iint_A \Phi \Phi^T dA \mathbf{U}^n \mathbf{b}^T + \iint_A \Phi \Phi^T dA \mathbf{V}^n \mathbf{b}^T \right] \mathbf{U}^n + \\ & \frac{A_H}{4A^2} \left[\iint_A \mathbf{b} \mathbf{b}^T dA + \iint_A \mathbf{a} \mathbf{a}^T dA \right] \mathbf{U}^n + \frac{g}{2A} \iint_A \Phi \mathbf{b}^T dA \boldsymbol{\eta}^n - \\ & f \iint_A \Phi \Phi^T dA \mathbf{V}^n + \frac{\tau_{bx} - \tau_{sx}}{\rho_r H} \iint_A \Phi dA - \bar{N}_{nx} \int_{\Gamma_2} \Phi d\Gamma = 0. \end{aligned} \right. \quad (6.38)$$

Enfin pour l'équation (6.32), nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_A \Phi \Phi^T dA \frac{\partial \mathbf{V}^n}{\partial t} + \frac{\beta}{2A} \left[\iint_A \Phi \Phi^T dA \mathbf{U}^n \mathbf{b}^T + \iint_A \Phi \Phi^T dA \mathbf{V}^n \mathbf{b}^T \right] \mathbf{V}^n + \\ & \frac{A_H}{4A^2} \left[\iint_A \mathbf{b} \mathbf{b}^T dA + \iint_A \mathbf{a} \mathbf{a}^T dA \right] \mathbf{V}^n + \frac{g}{2A} \iint_A \Phi \mathbf{a}^T dA \boldsymbol{\eta}^n + \\ & f \iint_A \Phi \Phi^T dA \mathbf{U}^n + \frac{\tau_{by} - \tau_{sy}}{\rho_r H} \iint_A \Phi dA - \bar{N}_{ny} \int_{\Gamma_2} \Phi d\Gamma = 0. \end{aligned} \right. \quad (6.39)$$

Les différentes intégrales sont, soit des matrices, soit des vecteurs. Leur calcul se fait en utilisant les formules d'intégration numérique suivantes :

$$\iint_A \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k dA = \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} 2A, \quad (6.40)$$

quand il s'agit d'une intégration sur l'aire A d'un élément triangulaire. Et,

$$\int_{\Gamma} \xi_1^i \xi_2^j d\Gamma = \frac{i!j!}{(i+j+1)!} L, \quad (6.41)$$

lorsqu'il s'agit d'intégrer sur l'un des côtés d'un triangle.

6.2.3 Forme matricielle

Après avoir effectué l'assemblage à partir des matrices et des vecteurs élémentaires, nous obtenons un système d'équations qui peut se mettre sous la forme :

$$[\mathbf{M}] \left\{ \dot{\mathbf{I}} \right\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{I}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (6.42)$$

où $[\mathbf{M}]$ désigne la matrice masse, $[\mathbf{K}]$ est la matrice de rigidité et le vecteur $\{\mathbf{I}\}$ est constitué par les variables η, U et V , et $\{\mathbf{F}\}$ représente le vecteur force. En inversant la matrice $[\mathbf{M}]$ (la matrice $[\mathbf{M}]$ étant symétrique et définie positive dans la plupart des problèmes rencontrés) et en multipliant toute l'expression (6.42) par cette inverse, nous avons l'expression suivante :

$$\left\{ \dot{\mathbf{I}} \right\} + [\mathbf{K}'] \{\mathbf{I}\} = \{\mathbf{F}'\}. \quad (6.43)$$

Mettons l'expression (6.43) sous la forme ci-après :

$$\left\{ \dot{\mathbf{I}} \right\} = \{\mathbf{F}'\} - [\mathbf{K}'] \{\mathbf{I}\}. \quad (6.44)$$

En décomposant les variables en variables connues et inconnues (portant respectivement les indices c et i), et en s'intéressant uniquement à la partie inconnue, l'expression (6.44) peut s'écrire :

$$\left\{ \dot{\mathbf{I}}_i \right\} = \{\mathbf{F}'_c\} - [\mathbf{K}'_{ii}] \{\mathbf{I}_i\} - [\mathbf{K}'_{ic}] \{\mathbf{I}_c\}, \quad (6.45)$$

puisque dans l'expression (6.45) le vecteur force est entièrement connu.

Nous signalons que les indices ii et ic, désignent respectivement les lignes et les colonnes liées aux variables inconnues; et les lignes et les colonnes relatives aux variables inconnues et connues à la fois.

6.3 Schémas numériques

La résolution de l'équation (6.45) se fera par la méthode de Runge-Kutta, couplée avec la méthode de Prédiction-Correction. Nous allons nous intéresser au quatrième ordre de ses deux schémas, compte tenu des résultats excellents qu'il donne.

6.3.1 Méthode de Runge-Kutta

Nous pouvons réécrire l'expression (6.45), sous la forme :

$$\{f(\mathbf{I}, t)\} = \{\mathbf{F}'_c\} - [\mathbf{K}'_{ii}] \{\mathbf{I}_i\} - [\mathbf{K}'_{ic}] \{\mathbf{I}_c\}. \quad (6.46)$$

Le schéma s'écrit de manière générale :

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t \sum_{j=1}^l p_j \{f(U_j, t_j)\}. \quad (6.47)$$

A l'ordre quatre nous avons $l=4$, ce qui nous conduit à l'expression ci-après :

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t [p_1 \{f(U_1, t_1)\} + p_2 \{f(U_2, t_2)\} + p_3 \{f(U_3, t_3)\} + p_4 \{f(U_4, t_4)\}] \quad (6.48)$$

avec les coefficients p_1, p_2, p_3 , et p_4 qui valent respectivement $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{3}$, et $p_4 = \frac{1}{6}$.

6.3.2 Méthode de Prédiction-Correction

Schéma d'Adams-Bashforth

C'est un schéma explicite. Il permet de faire les calculs de prédiction. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \{\Delta U\} = [C]^{-1} \Delta t [55 (\{F_t\} - [K(U_t)] \{U_t\}) - 59 (\{F_{t-\Delta t}\} - [K(U_{t-\Delta t})] \{U_{t-\Delta t}\}) + \\ 37 (\{F_{t-2\Delta t}\} - [K(U_{t-2\Delta t})] \{U_{t-2\Delta t}\}) - 9 (\{F_{t-3\Delta t}\} - [K(U_{t-3\Delta t})] \{U_{t-3\Delta t}\})] \end{cases} \quad (6.49)$$

avec,

$$\{U_{t+\Delta t}^0\} = \{U_t\} + \{\Delta U\}. \quad (6.50)$$

Schéma d'Adams-Moulton

C'est le schéma implicite. Il permet de faire la correction des résultats donnés par la prédiction. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \{\Delta U^i\} = [C]^{-1} \Delta t \frac{9}{24} [\{F_{t+\Delta t}\} - [K(U_{t+\Delta t}^{i-1})] \{U_{t+\Delta t}^{i-1}\}] + \\ [C]^{-1} \Delta t \frac{1}{24} [19 (\{F_t\} - [K(U_t)] \{U_t\}) - \\ 5 (\{F_{t-\Delta t}\} - [K(U_{t-\Delta t})] \{U_{t-\Delta t}\}) + (\{F_{t-2\Delta t}\} - [K(U_{t-2\Delta t})] \{U_{t-2\Delta t}\})] \end{cases} \quad (6.51)$$

avec,

$$\{U_{t+\Delta t}^i\} = \{U_t\} + \{\Delta U^i\}. \quad (6.52)$$

6.4 Discrétisation temporelle

Le pas de temps nécessaire pour les calculs est exprimé par les conditions C.F.L. (Courant-Frédéric-Lévy). Cette condition s'écrit :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2c}}. \quad (6.53)$$

Δx représente le pas de discrétisation spatiale, c désigne la célérité des particules et s'écrit $c = \sqrt{gH}$; avec g l'accélération de la pesanteur et H la profondeur la plus grande de la zone étudiée.

6.5 Hypothèses de calcul

Des études effectuées sur le canal de Vridi ont montré qu'il y a généralement en permanence une circulation d'eau de la lagune vers la mer [22] dans les couches voisines de la surface. Pour minimiser l'influence de ces quantités d'eau provenant du continent sur le modèle, nous allons nous situer pour la simulation, en période d'étiage. Nous négligeons aussi l'élévation de la surface de l'eau par rapport à la profondeur.

6.6 Mode opératoire

Les vitesses sont nulles sur les frontières solides. Nous introduisons à chaque pas de temps, les vitesses et la marée aux noeuds situés sur les frontières, et le modèle fait le calcul pour les noeuds intérieurs. Dans l'équation (6.45), le vecteur $\{\mathbf{I}_c\}$ reçoit les valeurs initiales et les valeurs aux frontières de courants et de marées. Au démarrage, à tous les noeuds (intérieurs comme aux frontières), on affecte les valeurs initiales de courants et de marées. Après la première itération, les valeurs aux limites sont affectées aux noeuds aux frontières, et le modèle simule celles des noeuds intérieurs au domaine.

Nous présentons les résultats en trois noeuds expérimentaux, qui se situent respectivement à la Digue Ouest (noeud 230), à l'Appontement (noeud 205) et au Fascinage (noeud 175). Nous comparons les résultats issus des calculs aux mesures in situ. Les données qui ont servi de conditions aux limites et de conditions initiales

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

sont issues des mesures effectuées par les marégraphes du Port Autonome d'Abidjan installés le long du canal de Vridi pour les marées et par le courantomètre DCM 12 (Doppler Current Meter 12) placé dans le canal de Vridi précisément à l'Appontement (au quai pilotine) du 15/02/1996 au 26/02/1996, pour les courants. Cet appareil mesure la vitesse et la direction moyenne des courants dans cinq couches différentes au dessus de la profondeur d'amarrage. Nous faisons des tests dans les cas linéaire et non linéaire, dans des couches d'épaisseurs différentes.

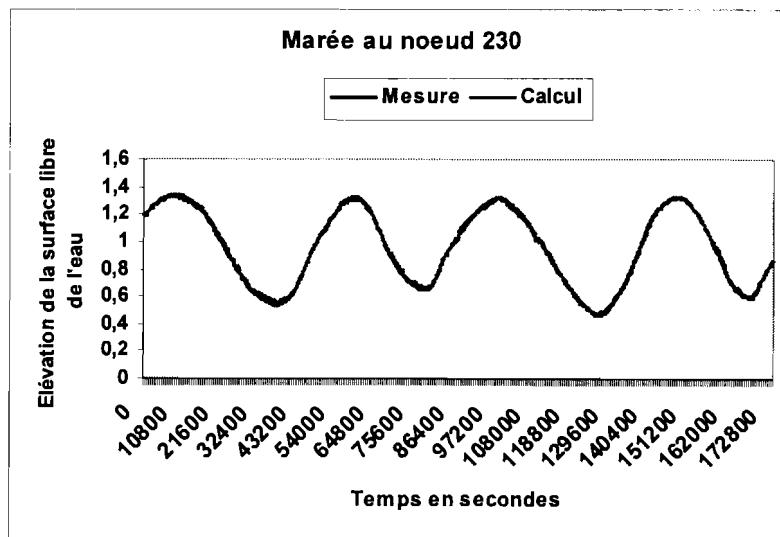
6.7 Présentation et analyse des résultats

Les résultats donnés par les calculs sont présentés ci-après. Exploitions les résultats cas par cas :

6.7.1 Résultats relatifs à la marée

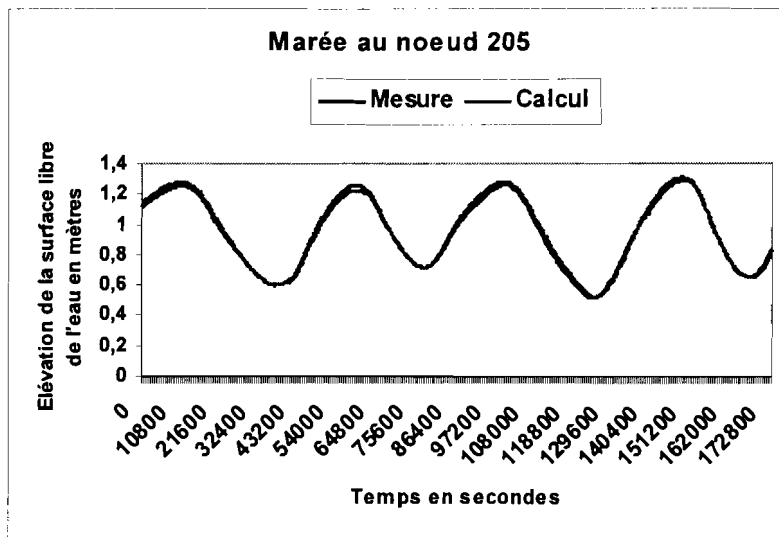
- Calcul dans le cas linéaire (résultats issus des calculs effectués sur les couches C1-C6-C7)

Marée calculée à partir des mesures de courants faites à la surface libre (couche C1)

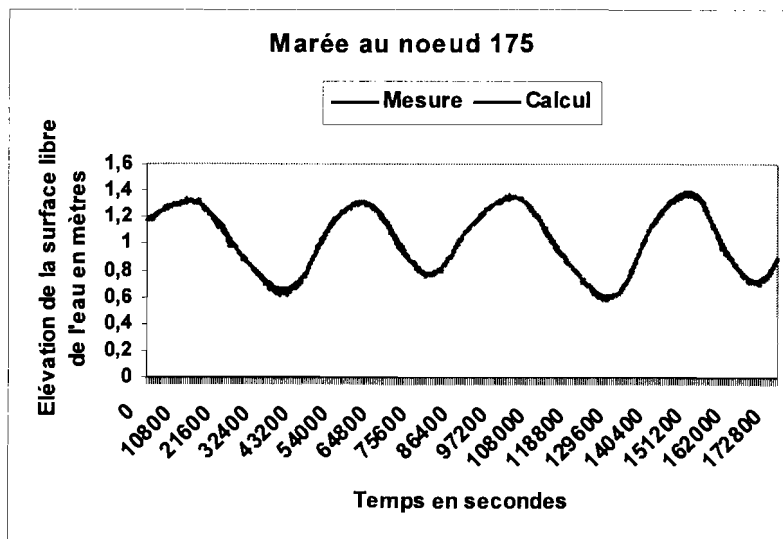


(a)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

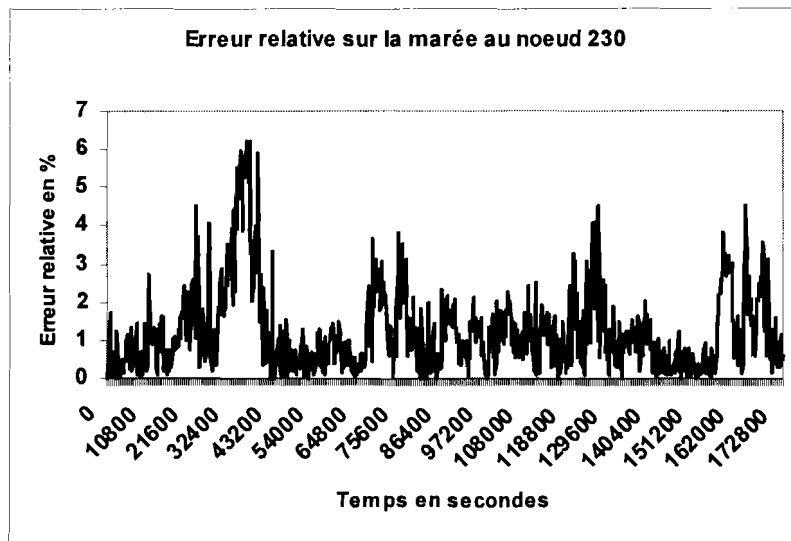


(b)

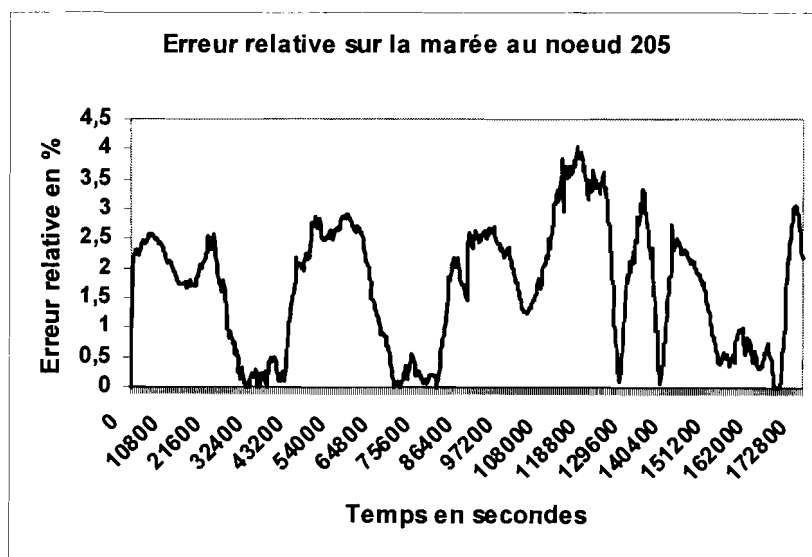


(c)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

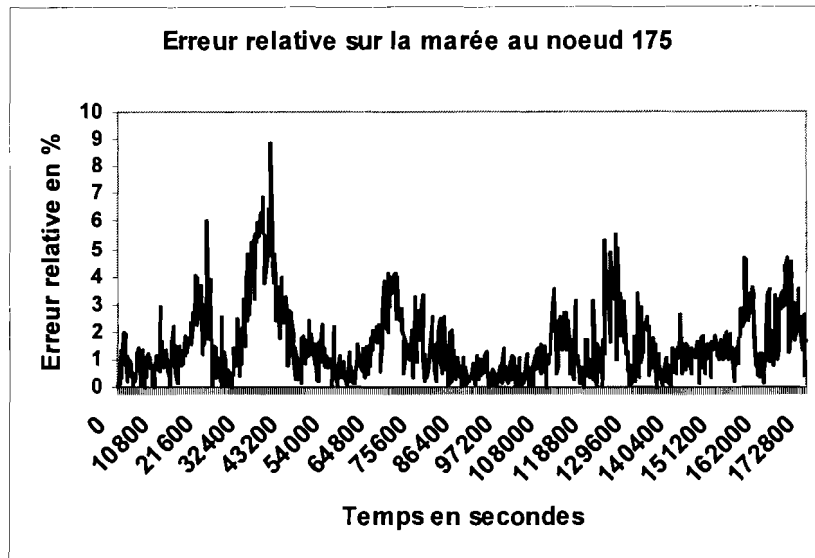


(d)



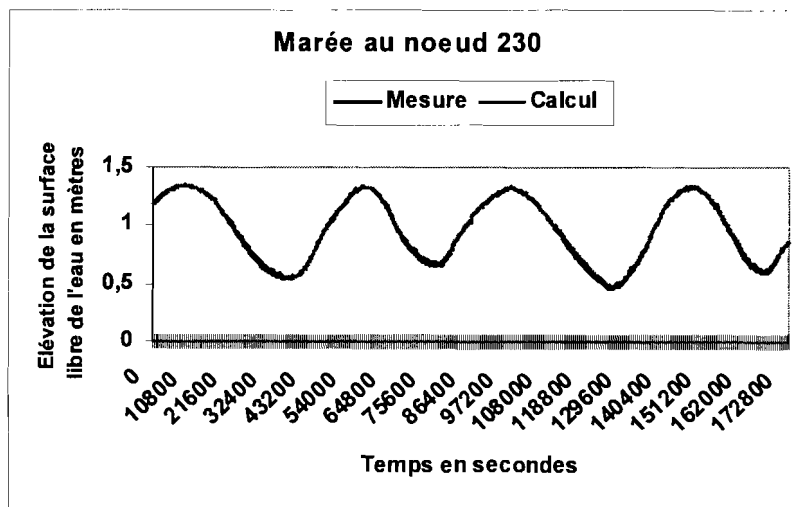
(e)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



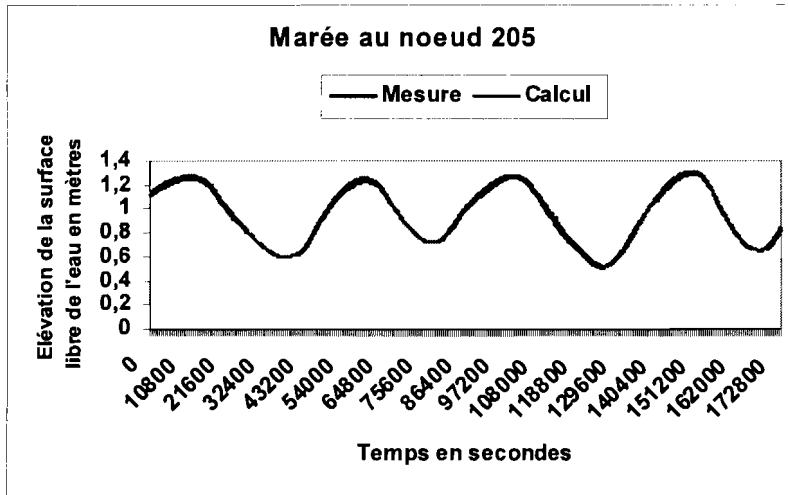
(f)

Marée calculée à partir des mesures de courants faites dans la couche C6

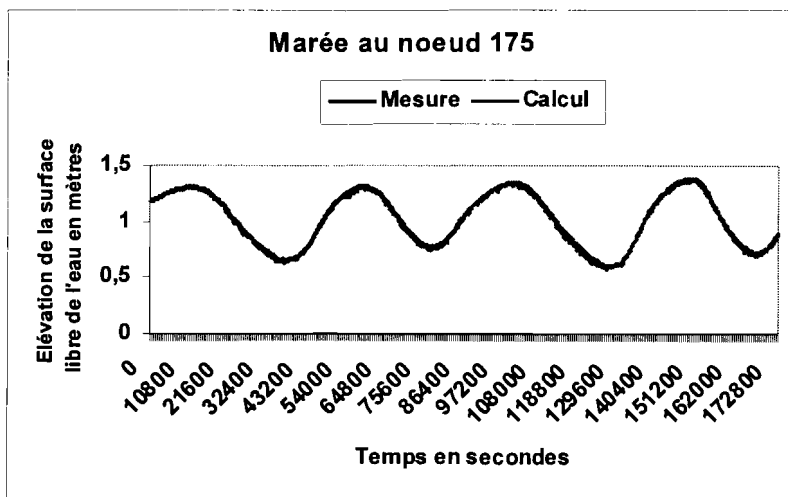


(g)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

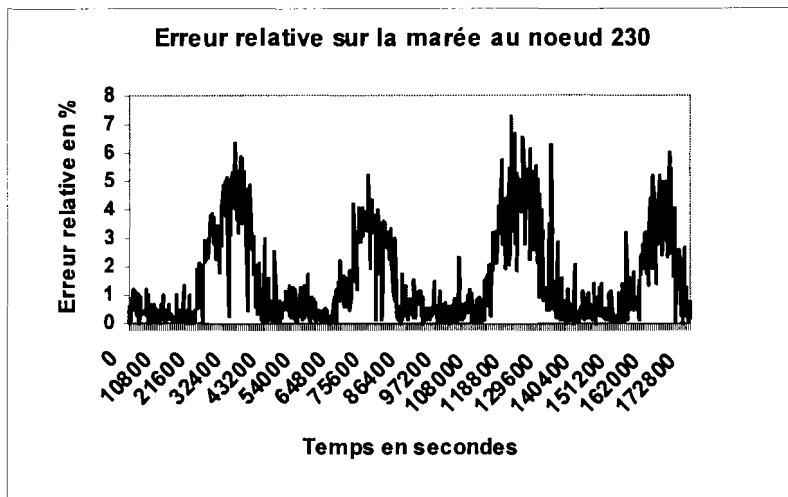


(h)

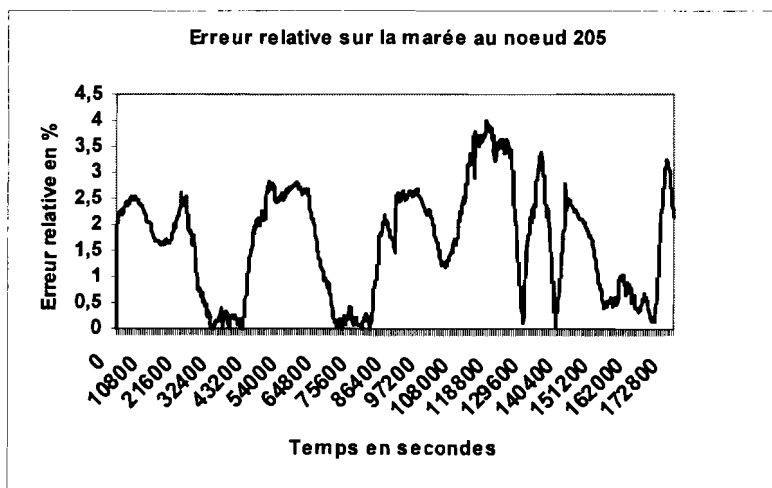


(i)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

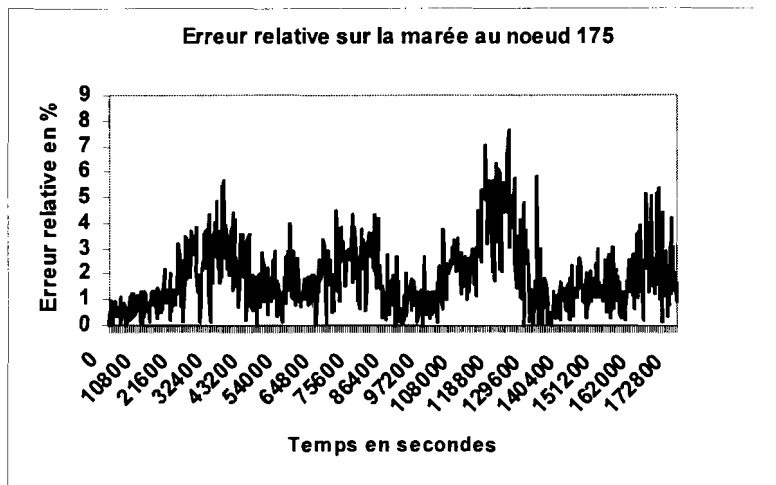


(j)



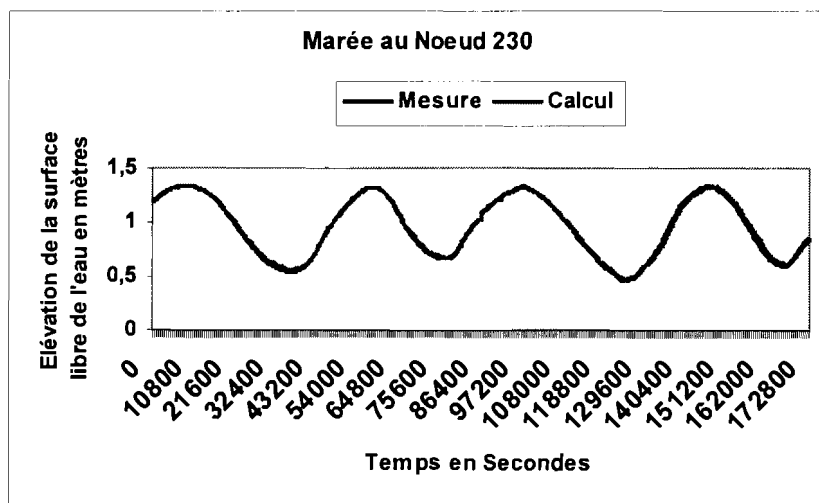
(k)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



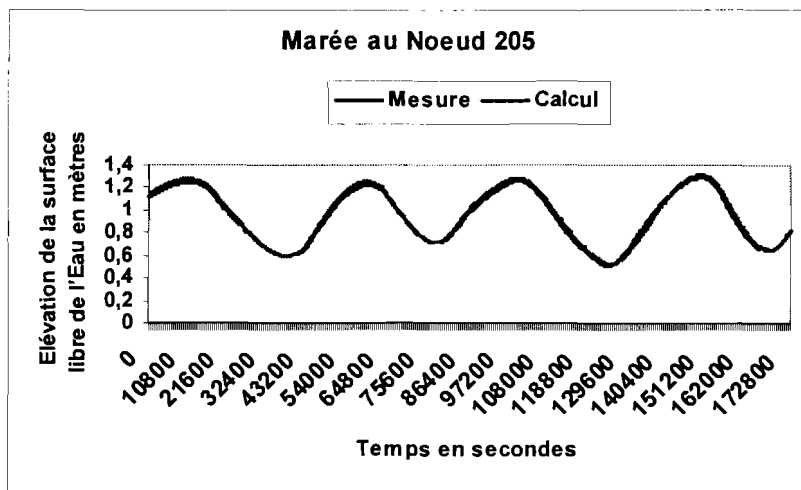
(l)

Marée calculée à partir des mesures de courants faites dans la couche couche C7

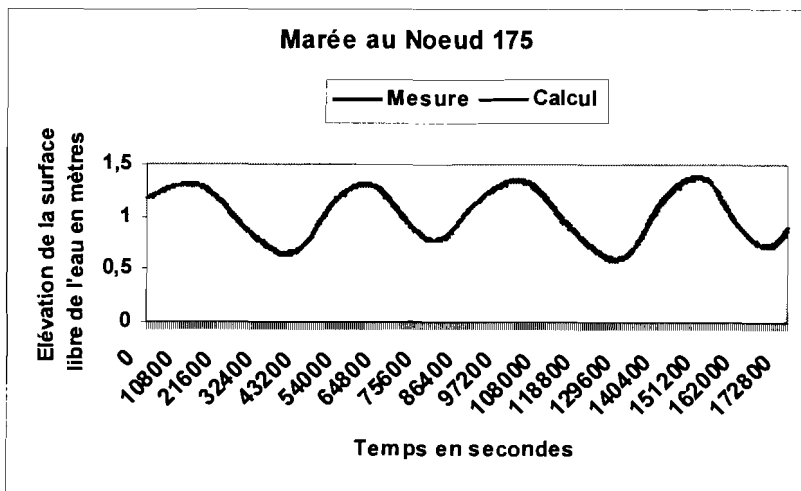


(m)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

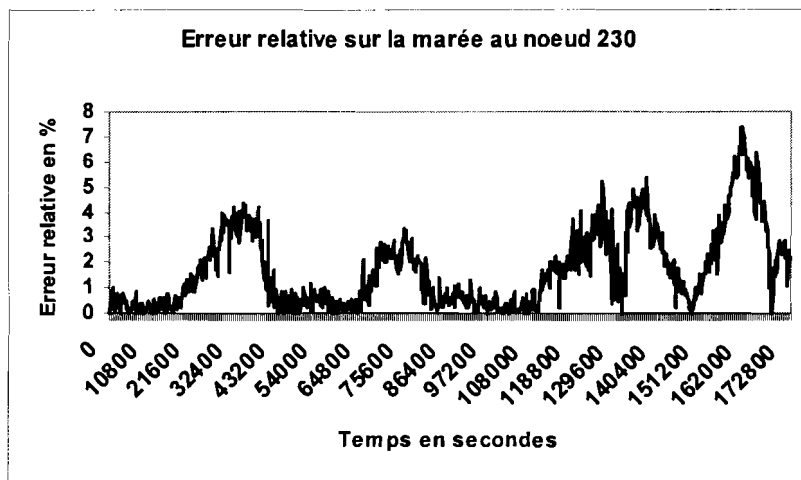


(n)

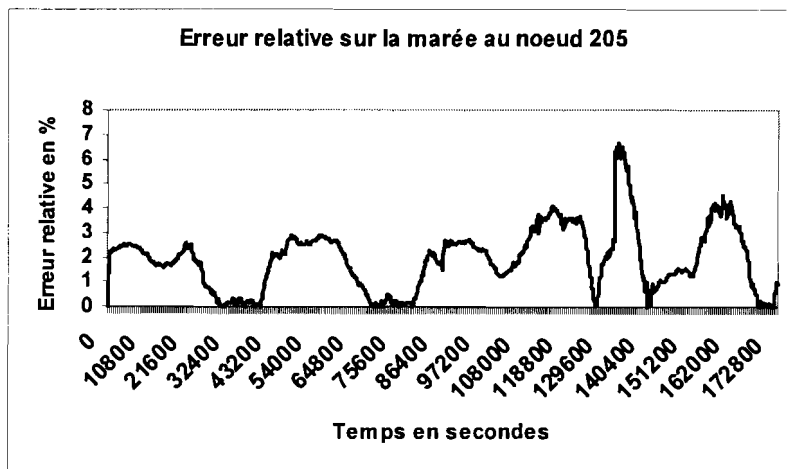


(o)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

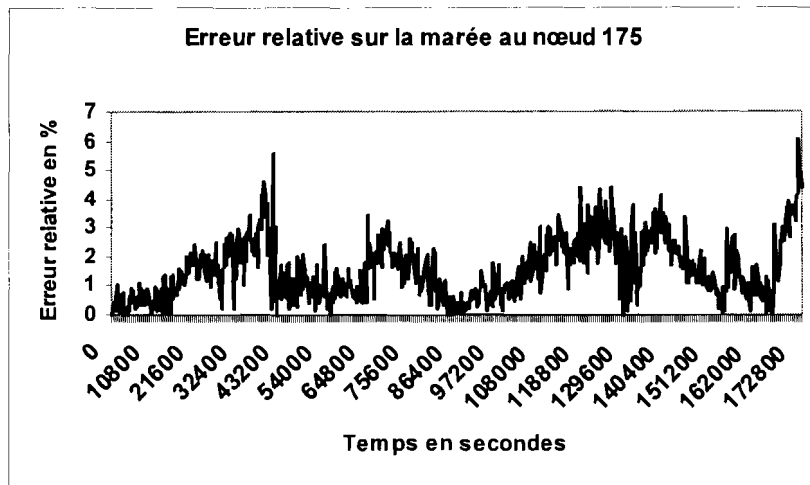


(p)



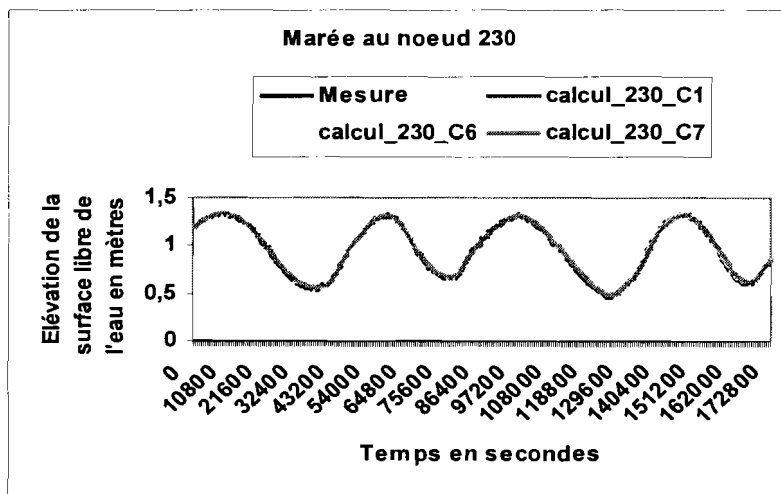
(q)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



(r)

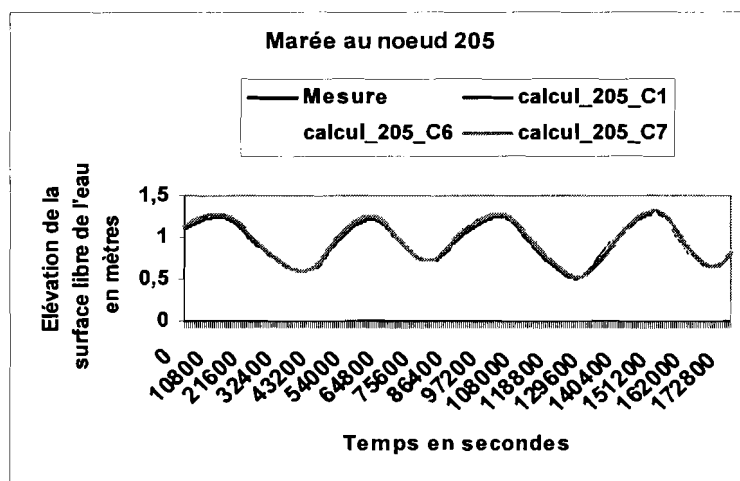
Comparaison des marées calculées en un même noeud pour des mesures de courants issues de différentes couches (couches C1-C6-C7)



(s)

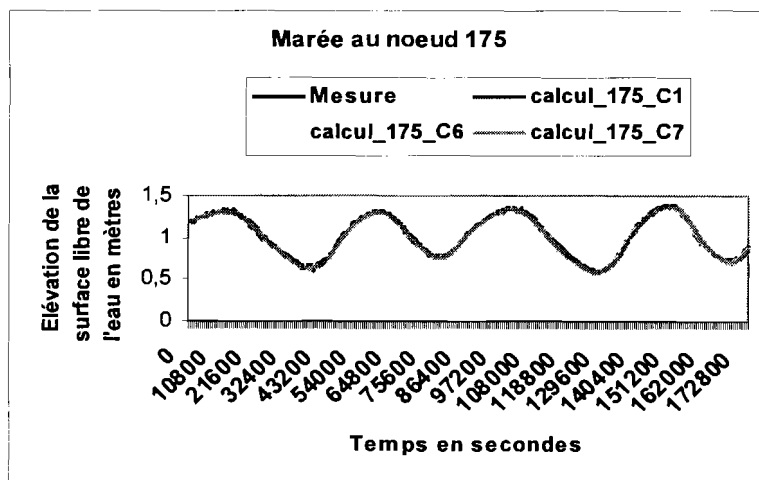
CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Comparaison des marées calculées en un même noeud pour des mesures de courants issues de différentes couches (couches C1-C6-C7)



(t)

Comparaison des marées calculées en un même noeud pour des mesures de courants issues de différentes couches (couches C1-C6-C7)

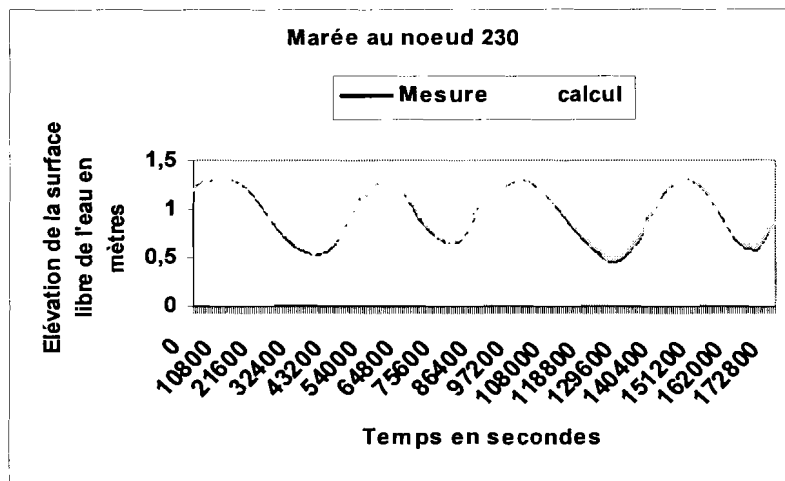


(u)

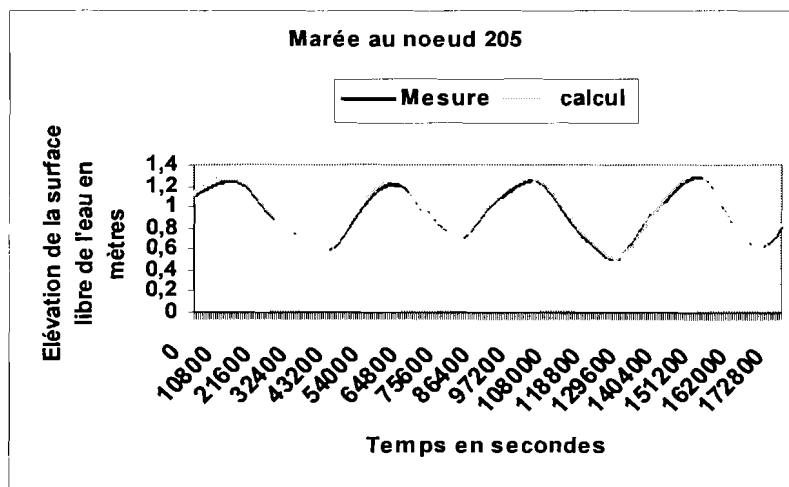
CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

- Calcul dans le cas non linéaire (couche C3-C7)

Marée issue des mesures de courants faites dans la couche C3

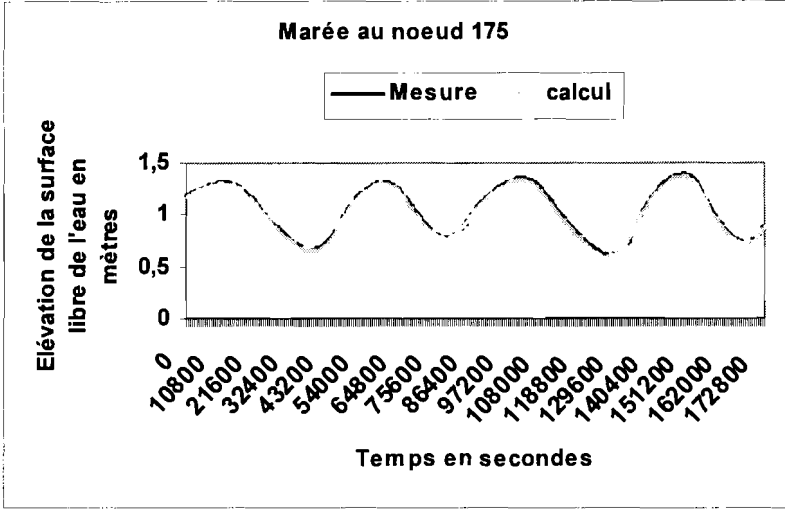


(v)

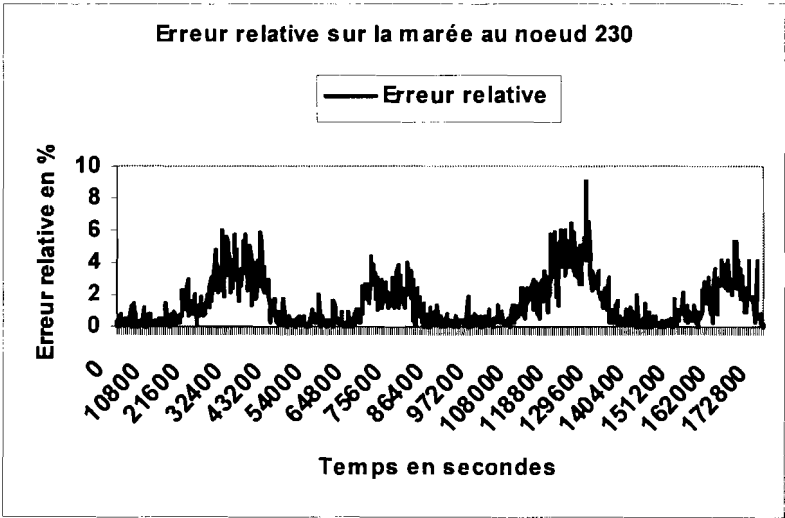


(w)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

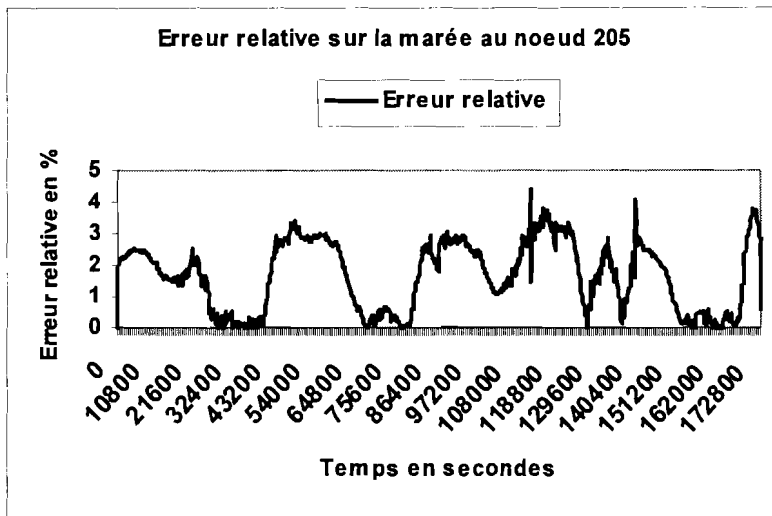


(x)

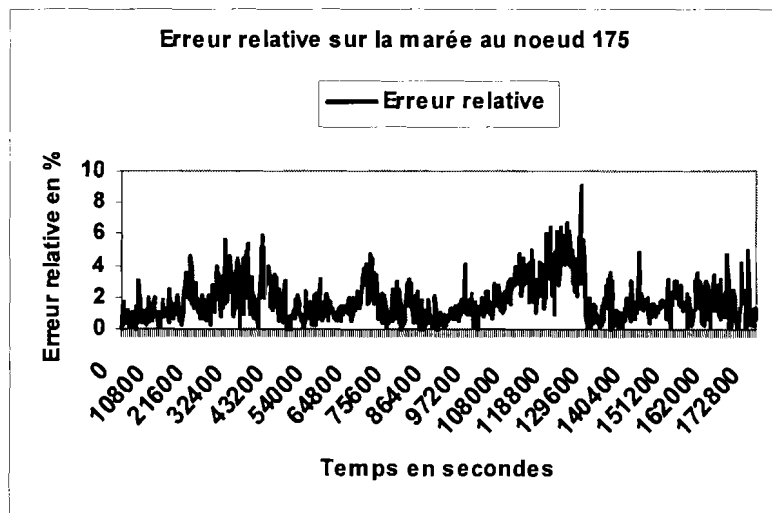


(y)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



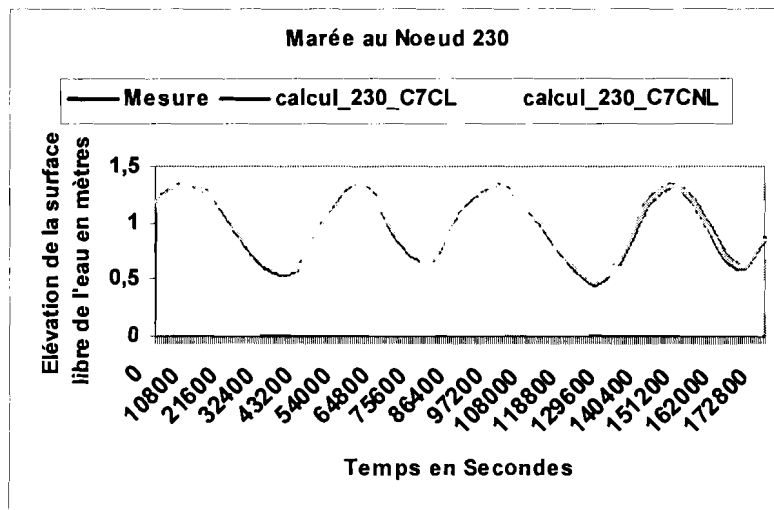
(z)



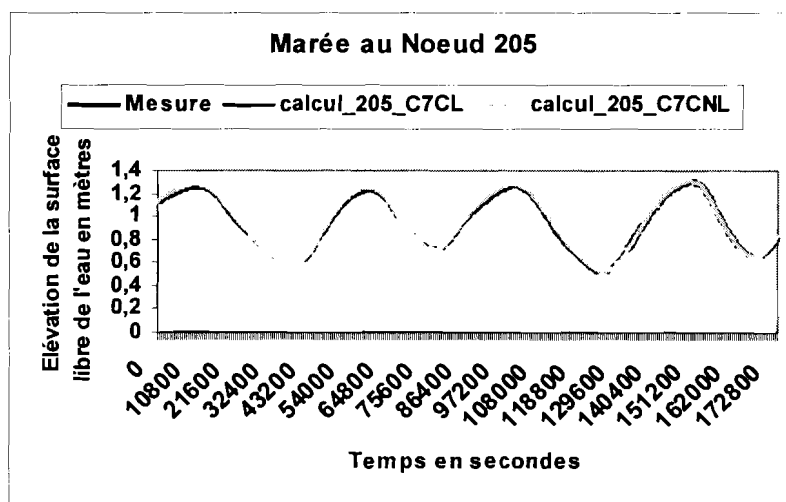
(a1)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

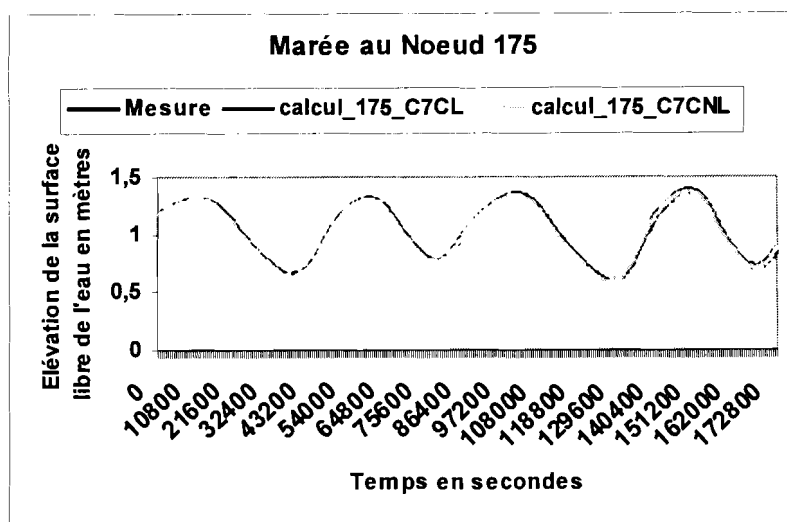
Comparaison des marées calculées dans les cas linéaire et non linéaire à partir des mesures de courants issues de la couche C7 en un même noeud



(b1)



(c1)



(d1)

Analyse et interprétations des courbes relatives à la marée

Nous faisons des tests sur différentes couches pour évaluer l'influence possible de l'écoulement dans chaque couche sur la marée. Nous allons analyser couche par couche ce qui se passe. Chaque couche a une épaisseur d'environ 2.5 m Nous désignons par :

- C1 la surface libre,
- C2 la première couche (le centre de cette couche se situe à 1.91 m en dessous de la surface libre),
- C3 la deuxième couche (le centre de cette couche se situe à 3.53 m en dessous de la surface libre),
- C4 la troisième couche (le centre de cette couche se situe à 5.15 m en dessous de la surface libre),
- C5 la quatrième couche (le centre de cette couche se situe à 6.67 m en dessous de la surface libre),
- C6 la cinquième couche (le centre de cette couche se situe à 8.39 m en dessous de la surface libre),
- C7 la sixième couche (c'est la couche moyenne formée à partir des autres couches).

Nous signalons que les notations ici diffèrent de celles données par le constructeur du courantomètre utilisé. L'appareil de mesure des courants donne les courants à la surface libre et dans cinq couches en dessous de la surface libre notées respectivement C1, C2, C3, C4 et C5.

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

- Si nous considérons C1, c'est à dire à la surface libre : l'observation des courbes de marée sur l'ensemble des trois noeuds tests montre que les résultats issus des calculs et les mesures sur le terrain sont presque identiques. Les erreurs relatives les plus grandes sont d'environ 6% au noeud 230 (situé à l'entrée du canal), de 4% au noeud 205 (localisé au milieu du canal) et de 9% au noeud 175 (se trouvant à la sortie du canal). Les valeurs maximales et minimales sont atteintes aux mêmes instants.

- Couche C3 : au niveau de cette couche, les calculs ont été effectués en non linéaires. Nous avons ici aussi, les courbes données par les calculs qui se confondent quasiment avec celles des mesures au niveau des trois noeuds. Les erreurs relatives sont de 9% au noeud 230, de 4.5% au noeud 205 et de 9% au noeud 175.

- Couche C6 : dans cette couche, nous avons aussi une bonne approximation de la marée sur l'ensemble des trois noeuds tests. Les amplitudes de la marée sont presque confondues. Les erreurs relatives sont de 7.5% au noeud 230, de 4% au noeud 205 et de 8% au noeud 175. On constate une légère baisse du pourcentage d'erreur à tous les noeuds.

- Couche C7 (couche moyenne) : les résultats numériques collent bien avec les mesures sur le terrain. Les erreurs relatives ont connues une légère baisse aux noeuds 230 et 175 ; ces erreurs sont respectivement de 7.5% et de 6%. Au noeud 205 il y a au contraire une légère augmentation, on a 6%.

Nous retenons que sur l'ensemble des noeuds tests considérés, les erreurs relatives maximales ne dépassent pas les 9%. Si nous nous intéressons en particulier au noeud 205, situé au milieu du canal, loin des perturbations observées à l'entrée et à la sortie du canal ; où l'on peut supposer le régime de l'écoulement établi, on observe les erreurs les plus faibles ; en moyenne 4,5%.

Si nous superposons les courbes obtenues à partir des mesures de courants dans les couches C1, C6 et C7, on constate que les courbes se confondent quasiment et donnent l'allure d'une courbe unique. On peut donc dire que dans le canal, la marée peut être prédite à partir de mesures de courants effectuées dans n'importe quelle couche avec une grande satisfaction.

Lorsque nous comparons les courbes obtenues dans les cas linéaire et non linéaire dans la couche C7, nous constatons que les courbes sont presque identiques. On dira donc que la non linéarité des équations qui régissent l'écoulement dans le canal de Vridi n'influe pas vraiment sur la marée.

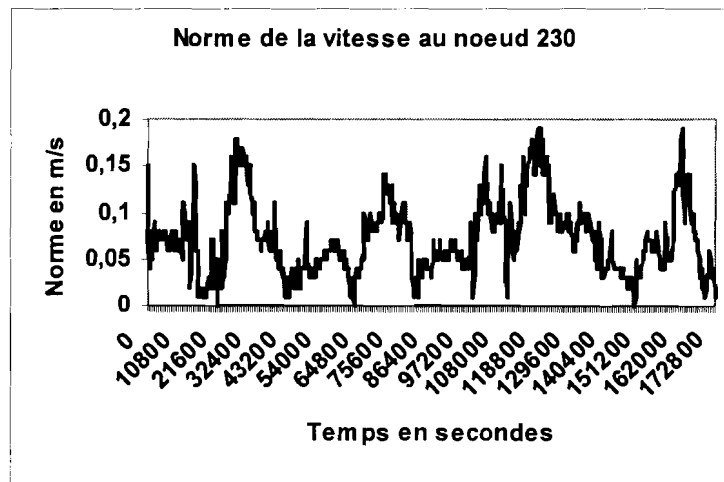
Les résultats donnés par le calcul de la marée sont satisfaisants. Cependant, on pourrait encore les améliorer, si l'on connaissait avec beaucoup plus de précision la zone d'influence de chaque marégraphe installé le long du canal. Ces résultats intéressants que nous avons, sont dûs au fait qu'au niveau des marées, nous avons une base de données importante sur presque tout le canal ; ce qui nous a permis d'avoir de bonnes conditions aux limites et conditions initiales.

6.7.2 Résultats relatifs aux courants

Pour une analyse juste des courants calculés, nous allons nous intéresser aux cas linéaire et non linéaire à la fois.

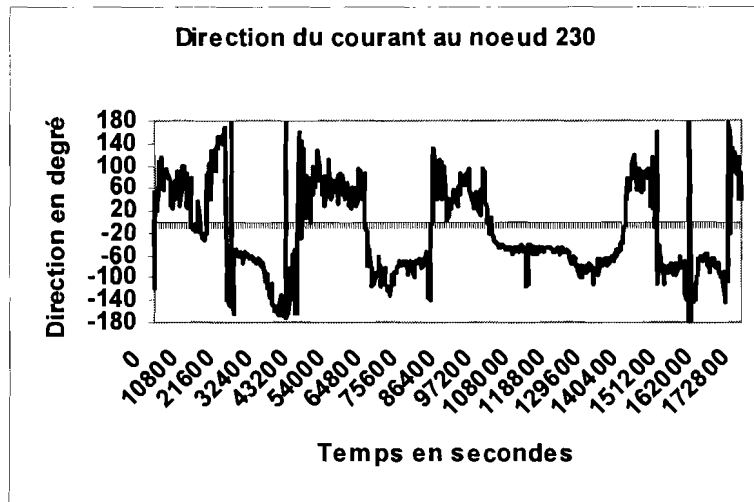
- Calcul dans le cas linéaire (résultats issus des calculs effectués sur les couches C1-C6-C7)

Vitesses calculées à partir des mesures de courants issues de la surface libre (couche C1)

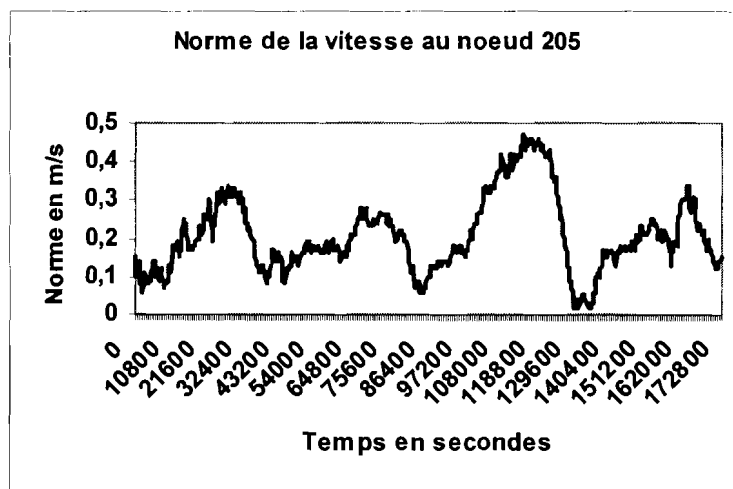


(e1)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

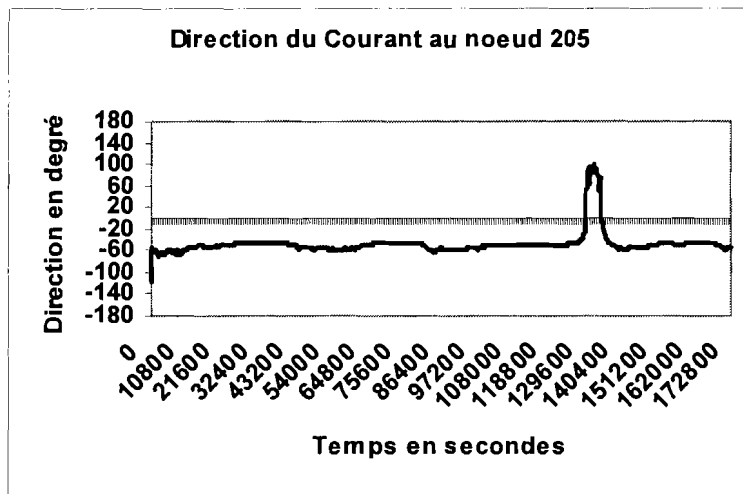


(f1)

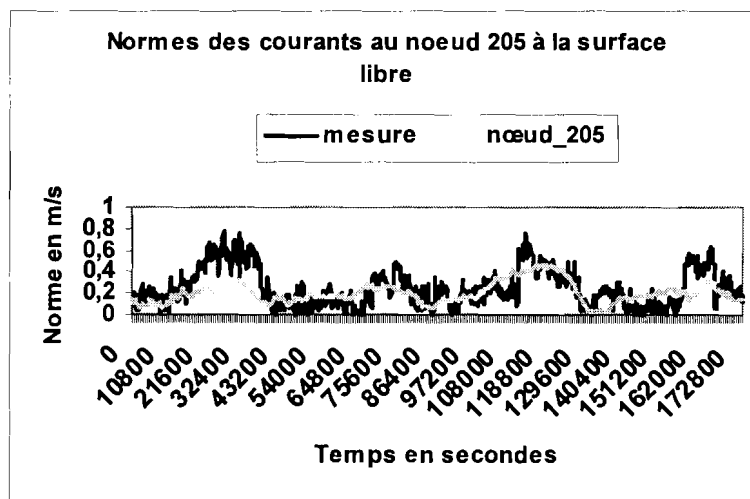


(g1)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

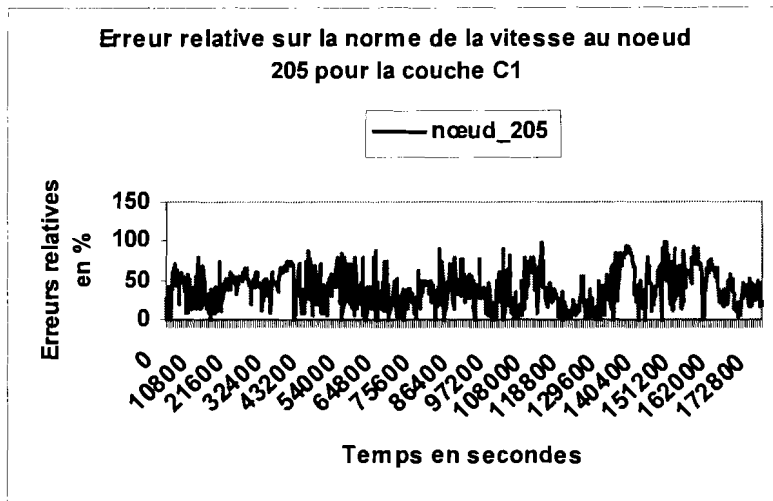


(h1)

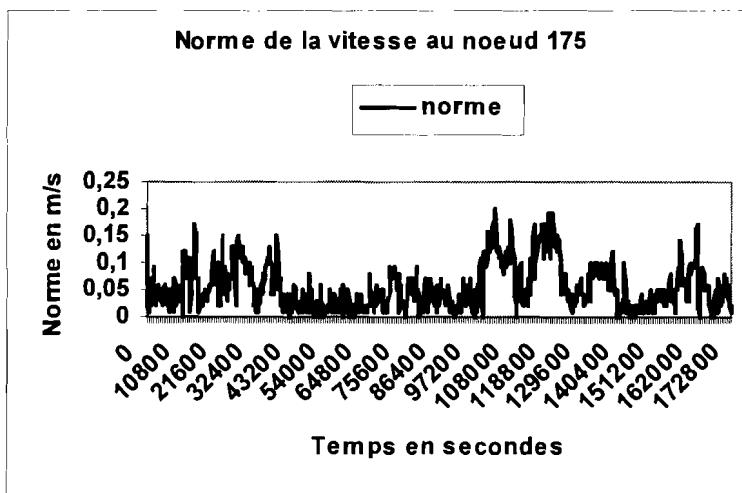


(i1)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

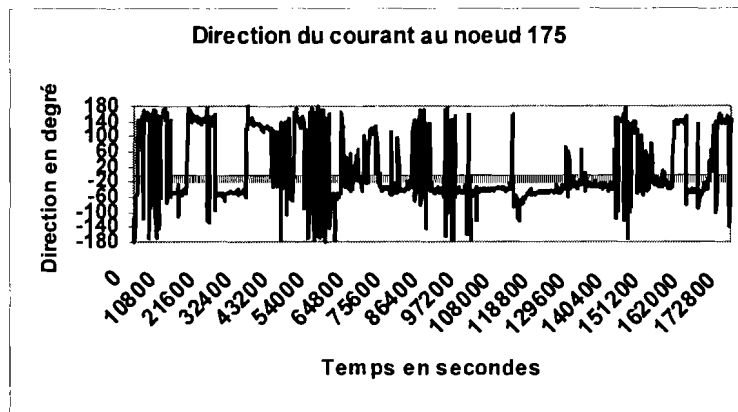


(j1)



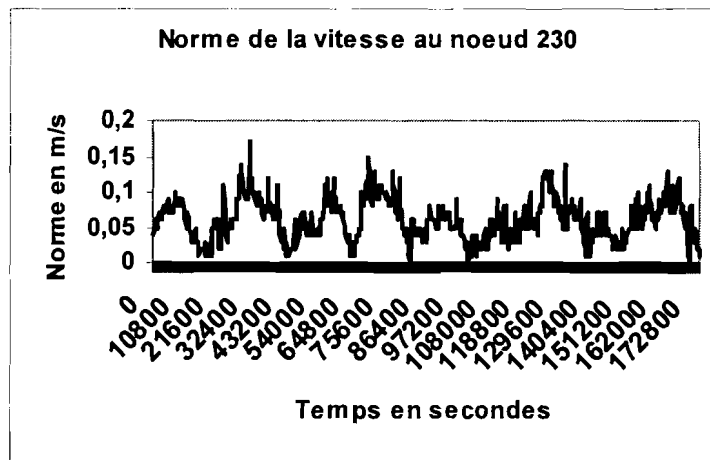
(k1)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



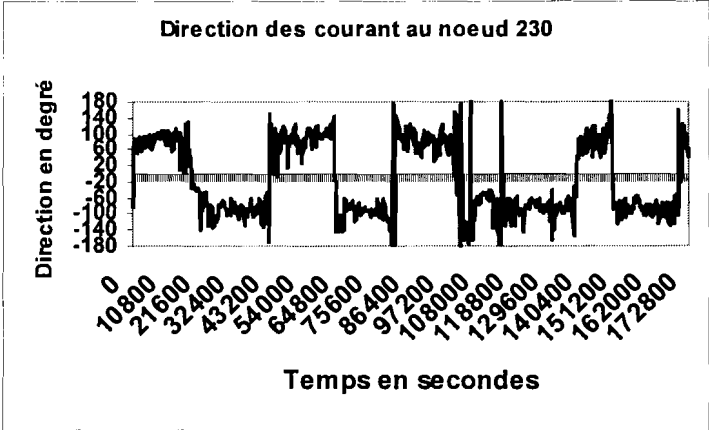
(11)

Vitesses calculées à partir des mesures de courants issues de la couche C6



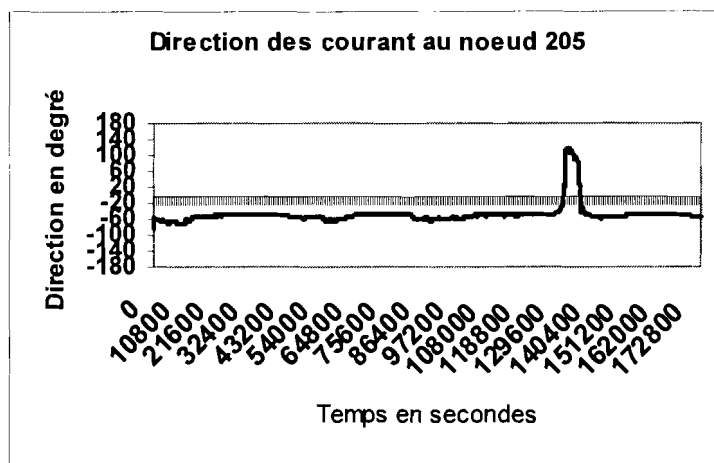
(o1)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

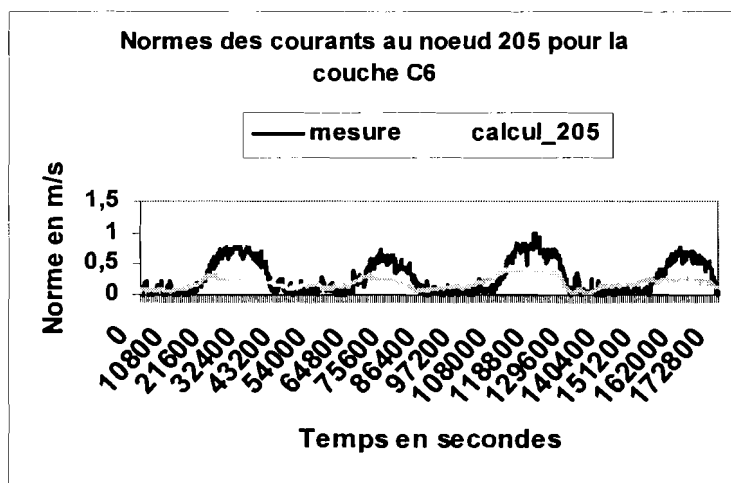


(q1)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

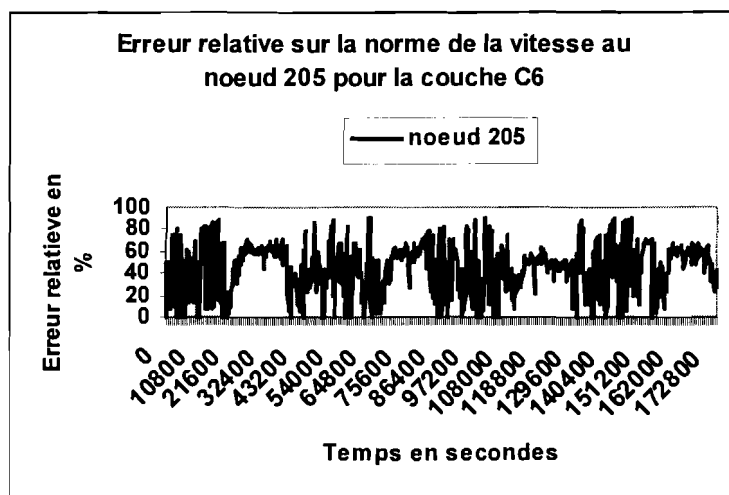


(r1)

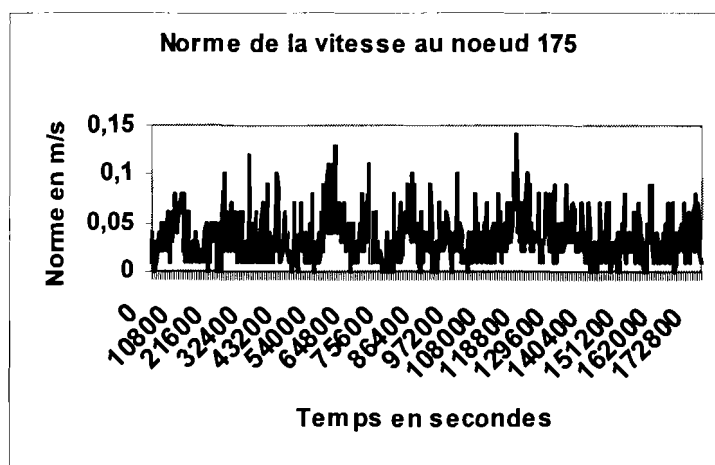


(s1)

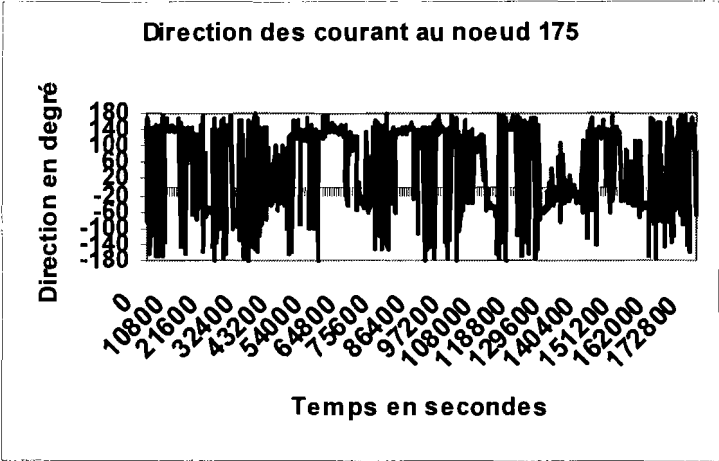
CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



(t1)

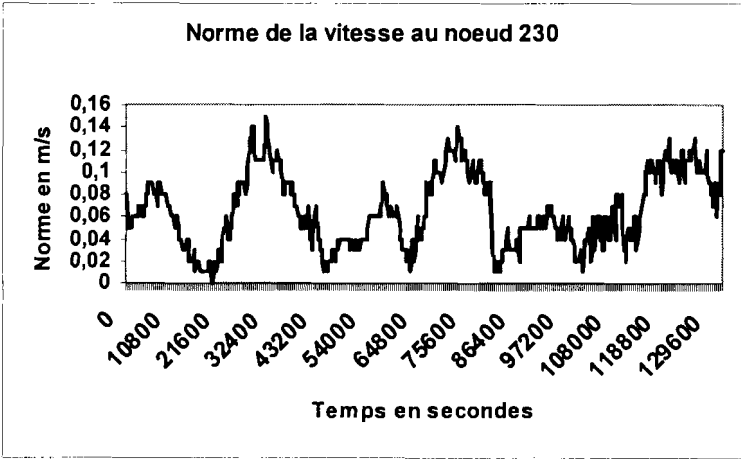


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



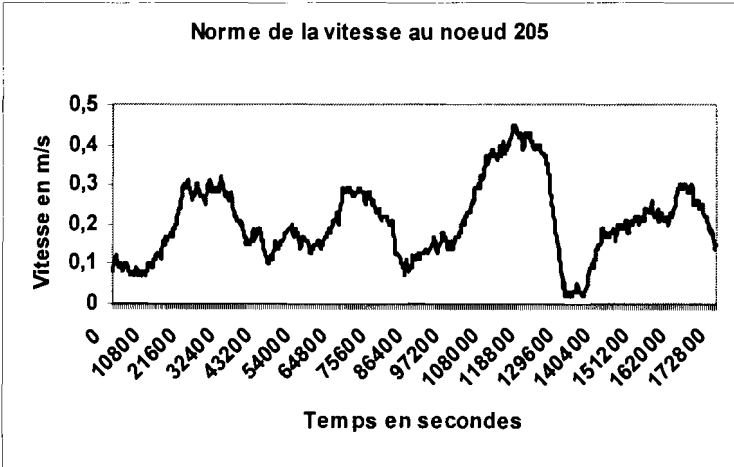
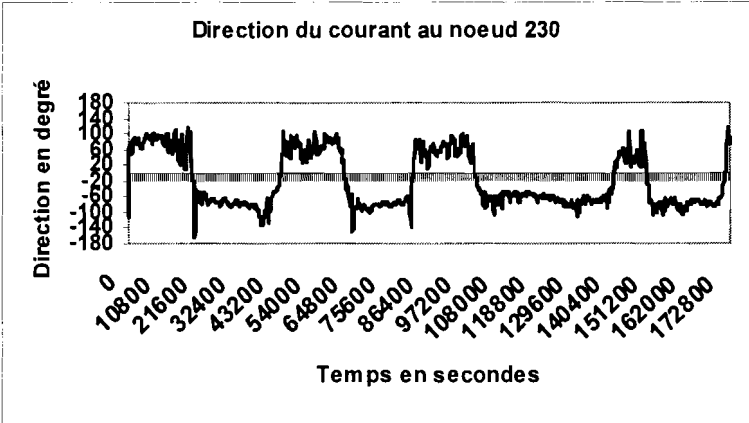
(u1)

Vitesses calculées à partir des mesures de courants issues de la couche C7



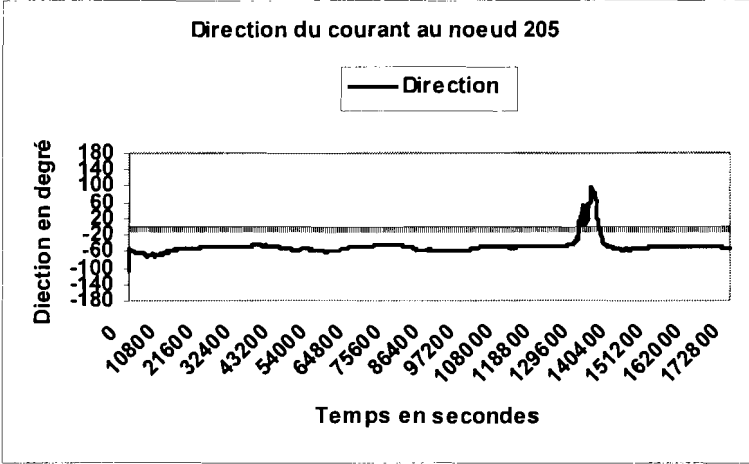
(v1)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

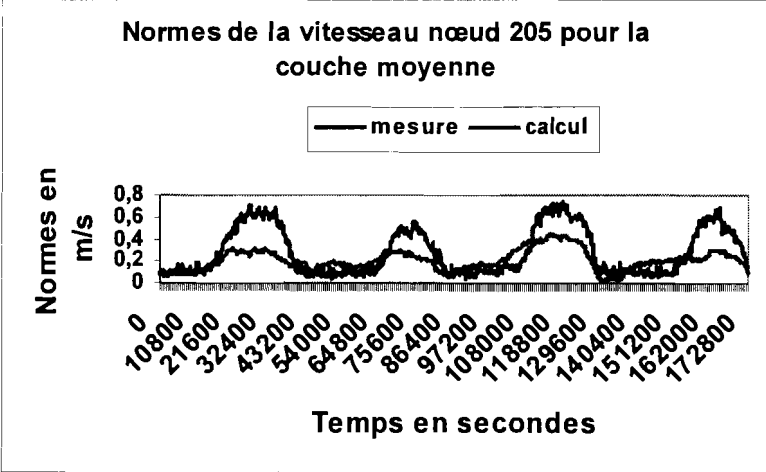


(x1)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

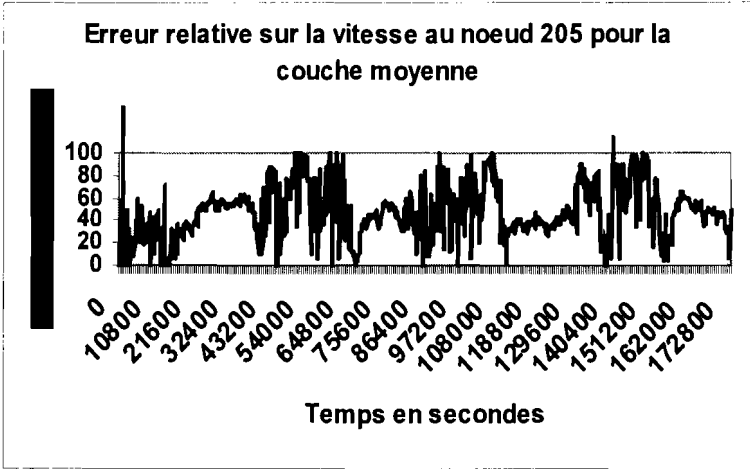


(y1)

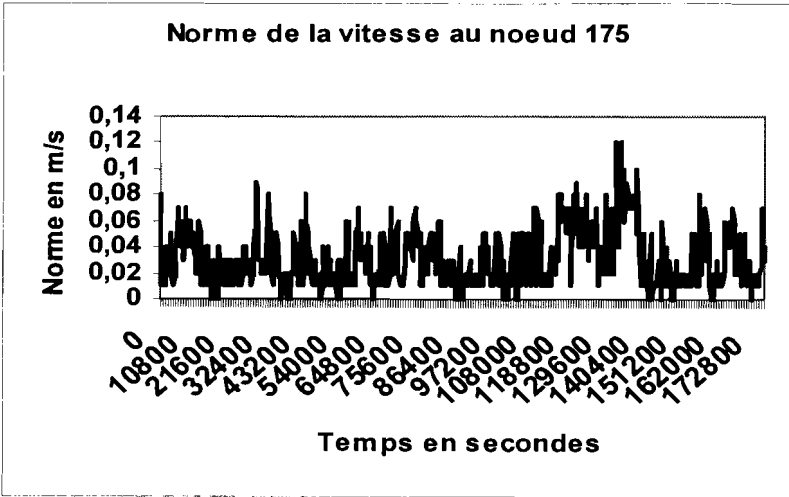


(z1)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

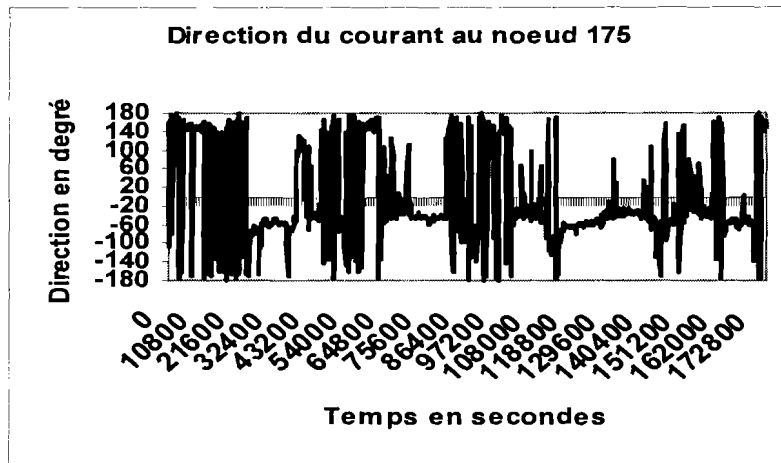


(a2)



(b2)

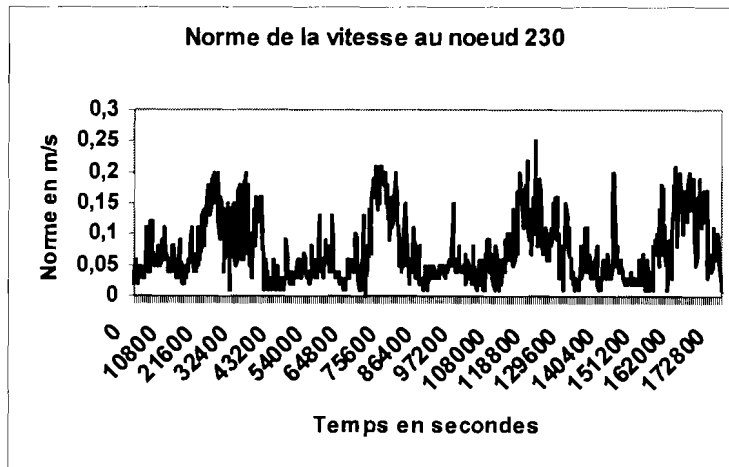
CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



(c2)

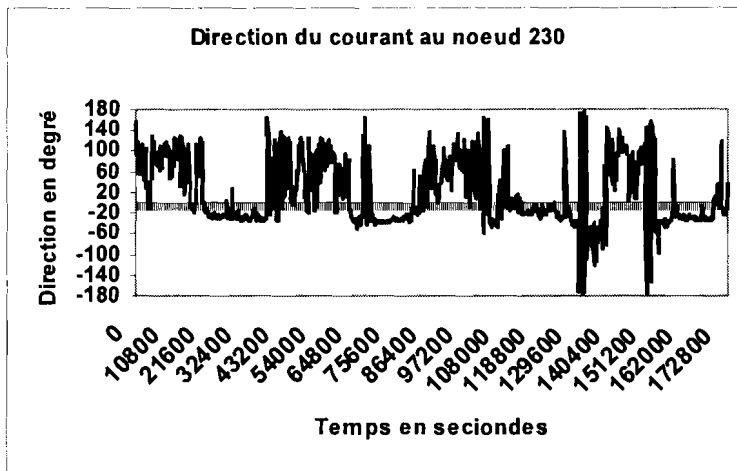
- Calcul dans le cas non linéaire :

Vitesses calculées à partir des mesures de courants issues de la couche C3

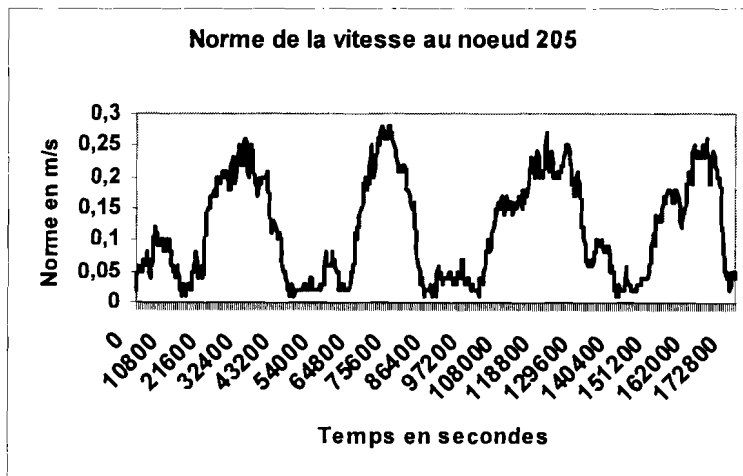


(d2)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

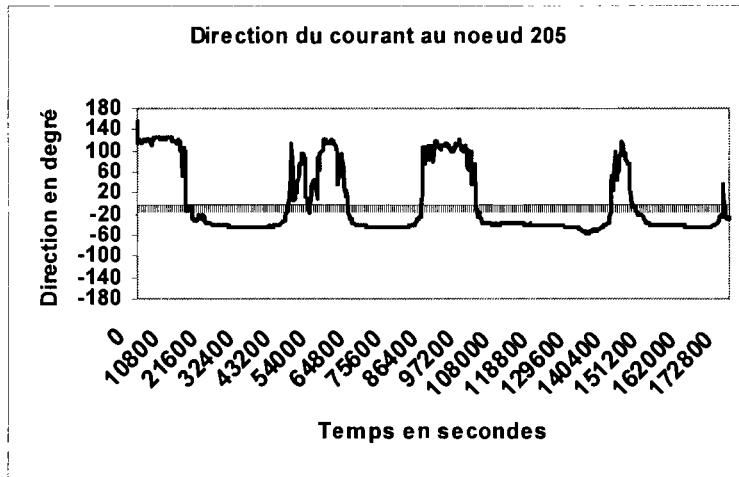


(e2)

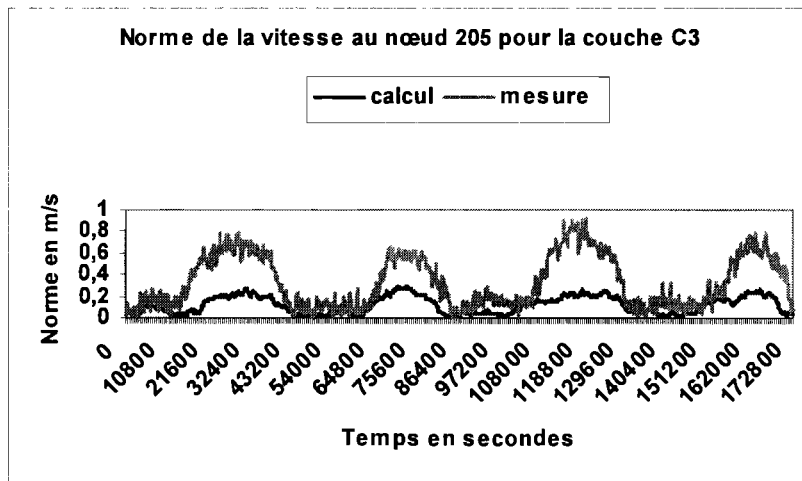


(f2)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

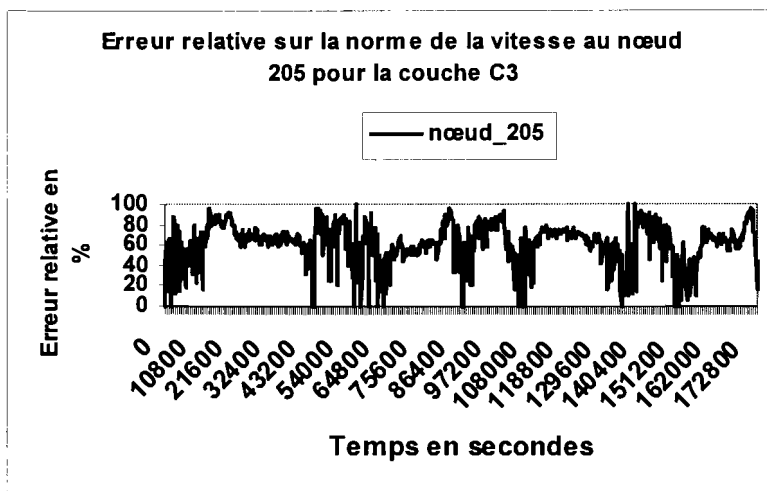


(g2)

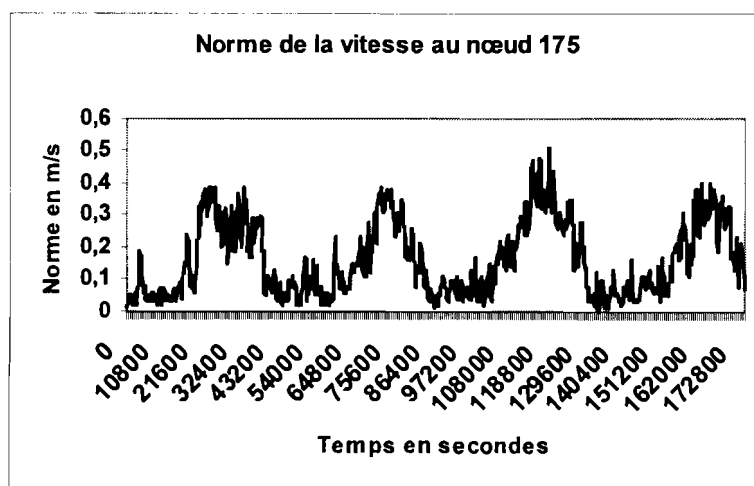


(h2)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

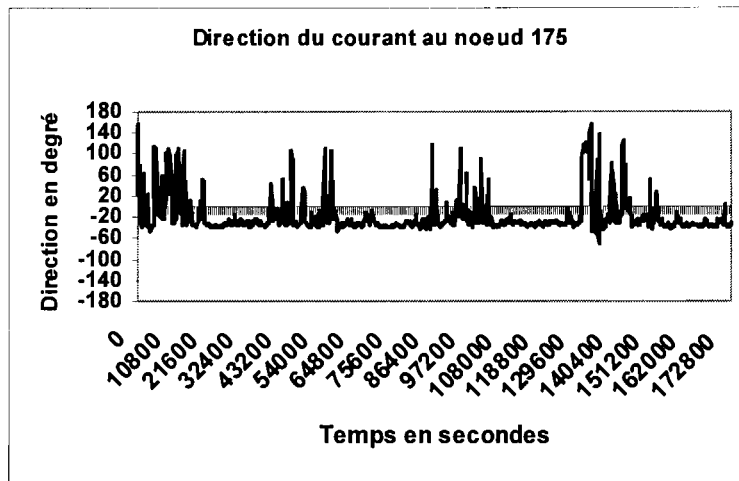


(i2)



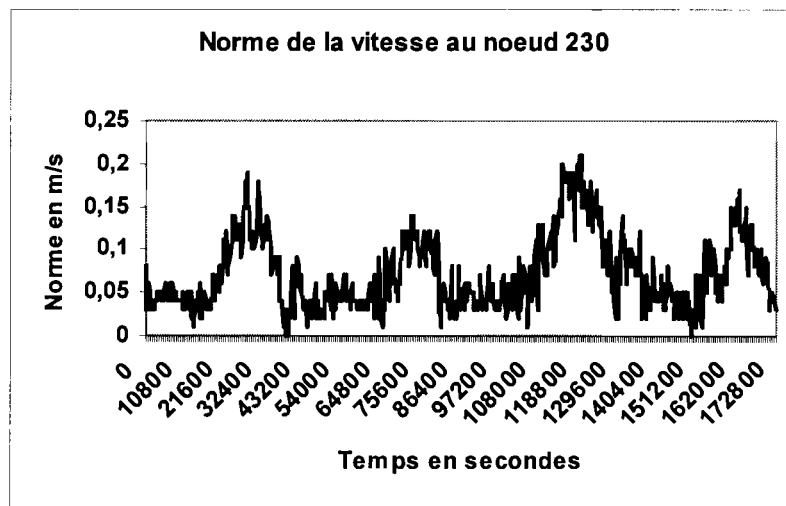
(j2)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



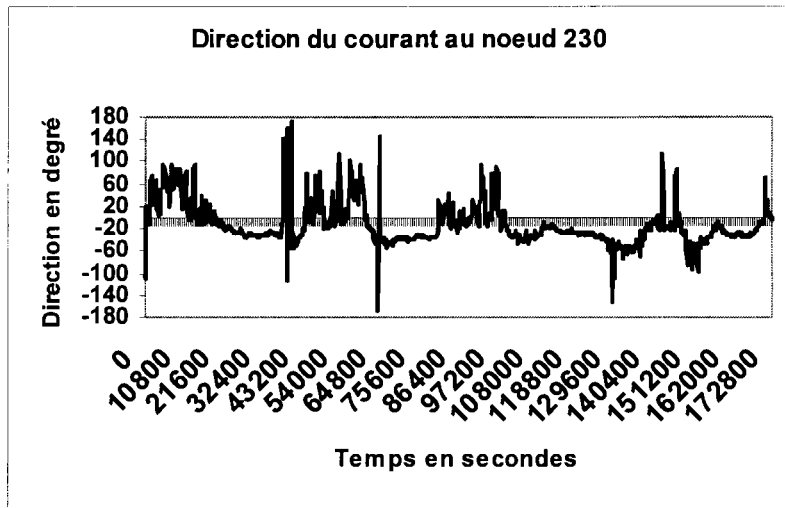
(k2)

Vitesses calculées à partir des mesures de courants issues de la couche C7

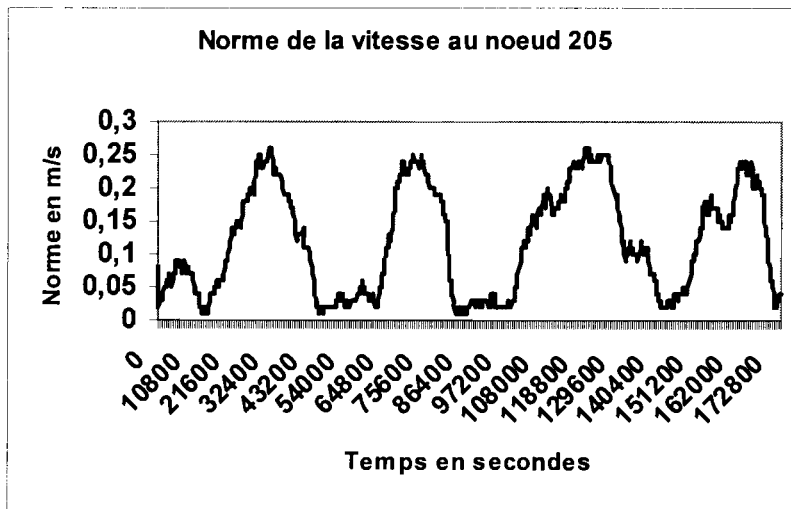


(l2)

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

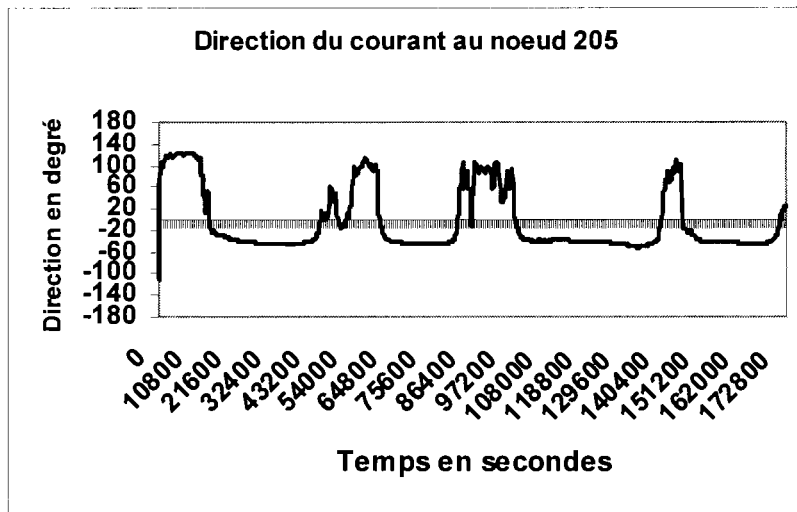


(m2)

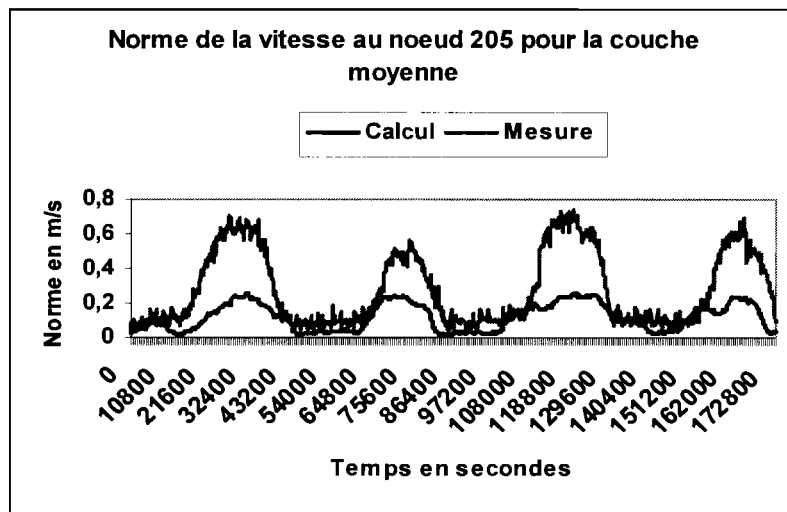


(n2)

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

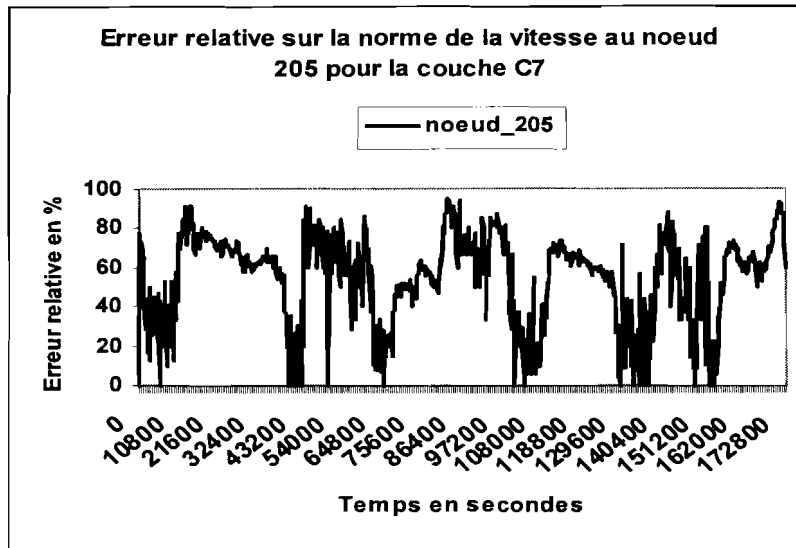


(o2)

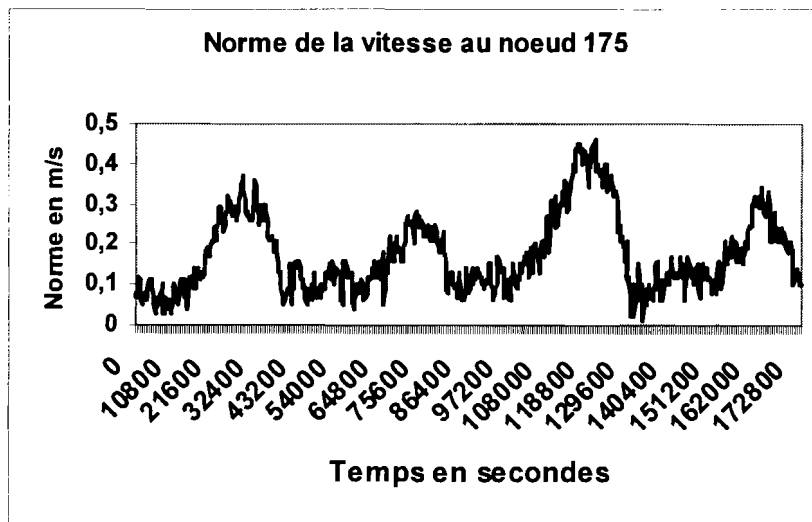


(p2)

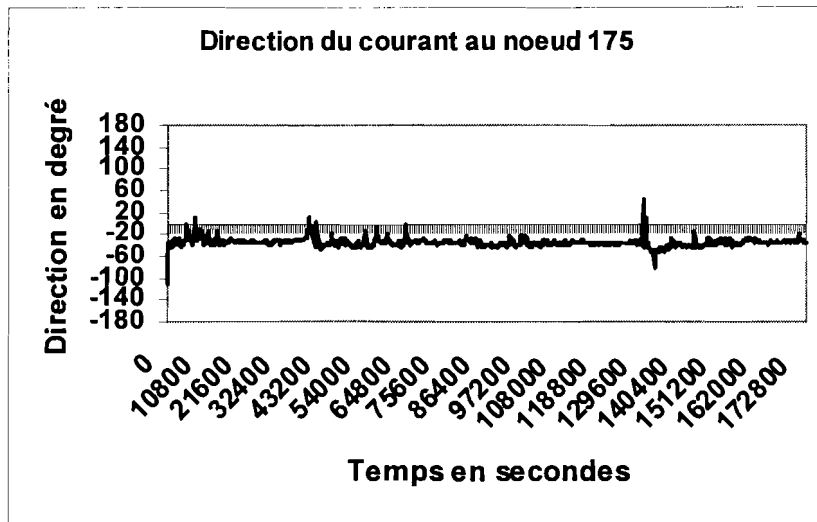
CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



(q2)



(r2)



(s2)

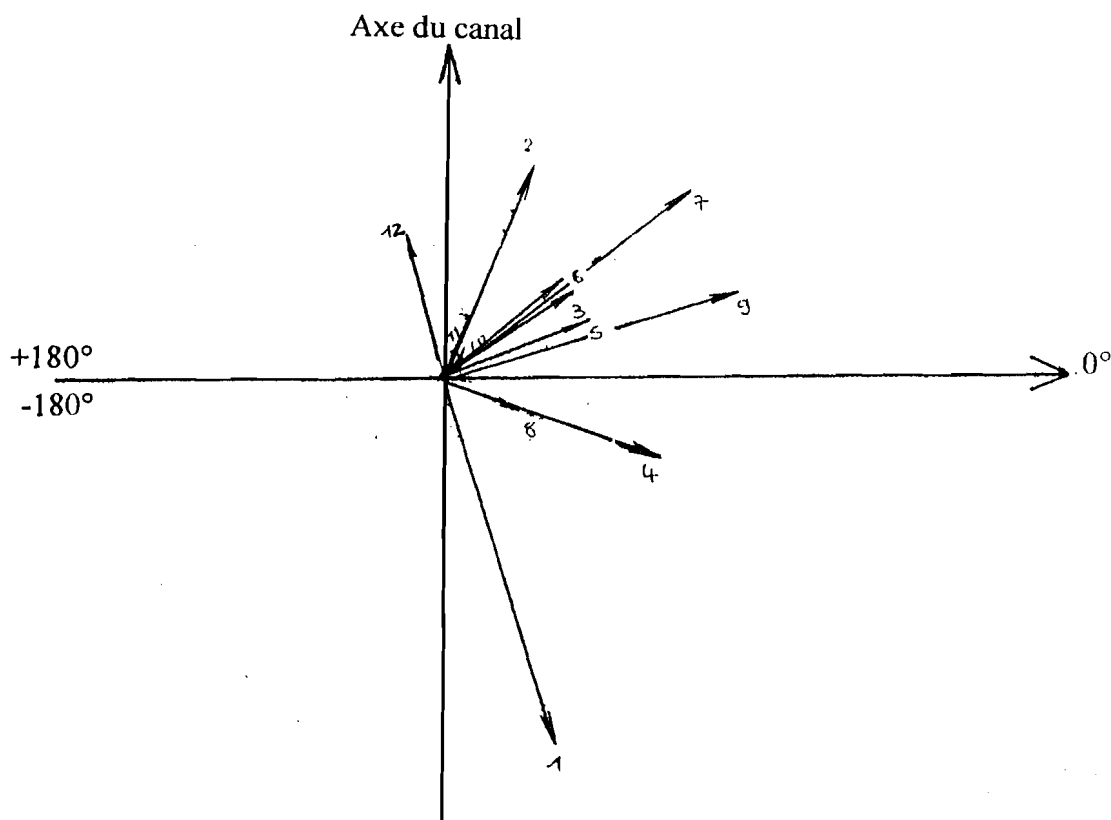
CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Les roses de courants seront aussi représentées sur une période de 12 heures (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes pour le flot et $t=23400$ secondes à $t=43200$ secondes pour le jusant).

Cas linéaire (avec les couches C1-C6-C7)

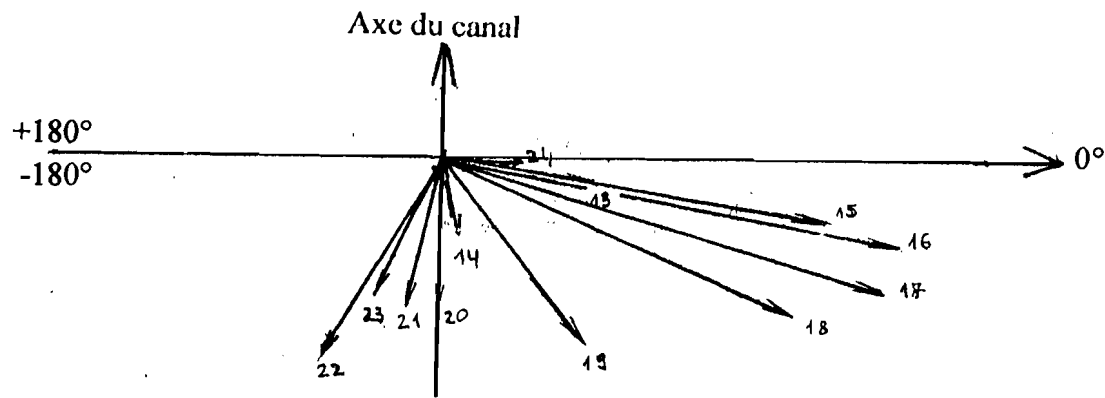
- Roses de courants données par les calculs faits à partir des mesures de courants issues de la surface libre (couche C1) :

Noeud 230 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)

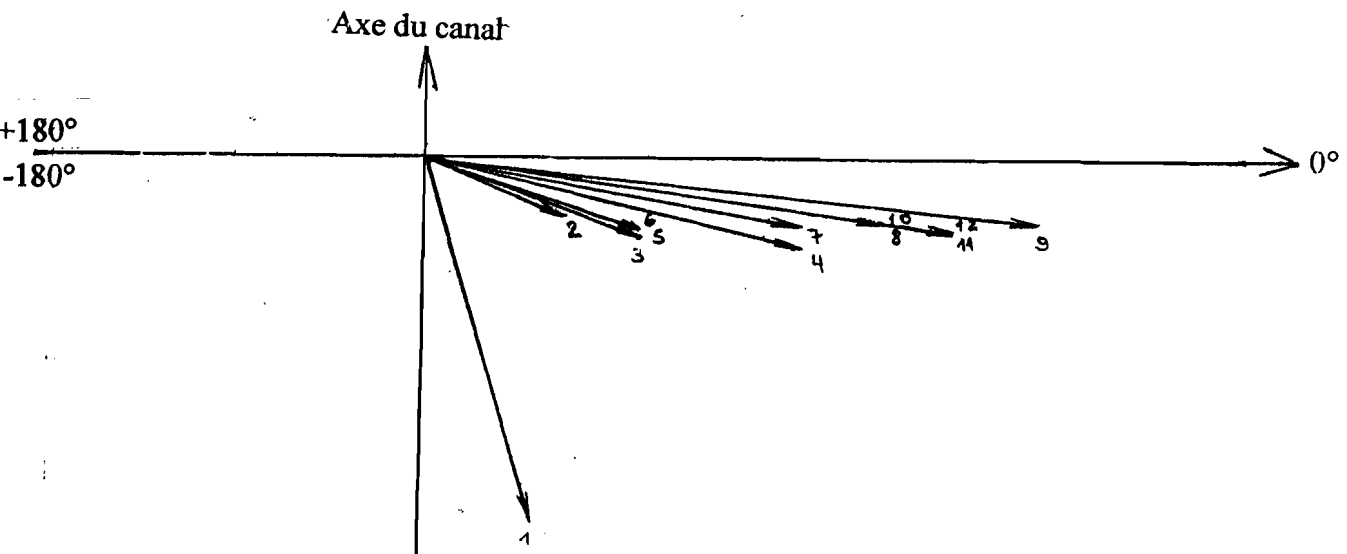


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 230 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes.)

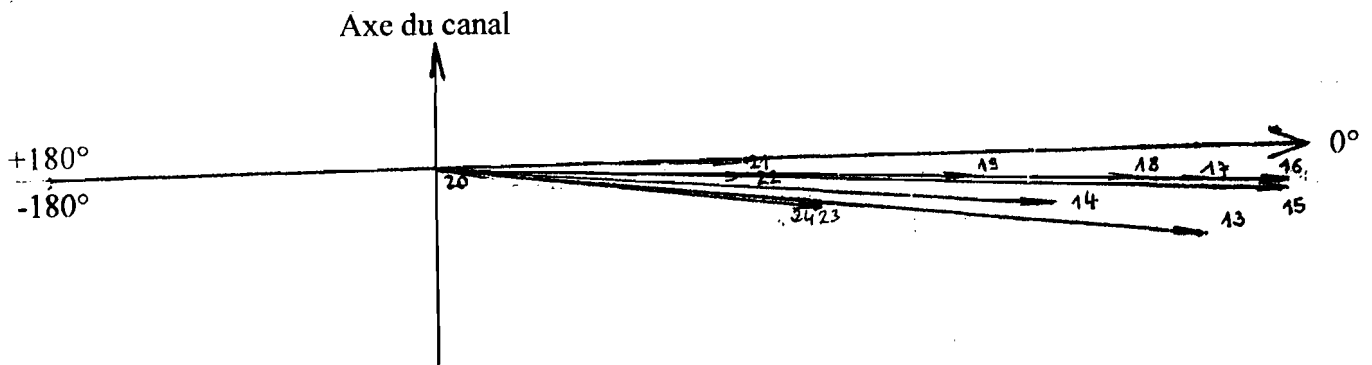


Noeud 205 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)

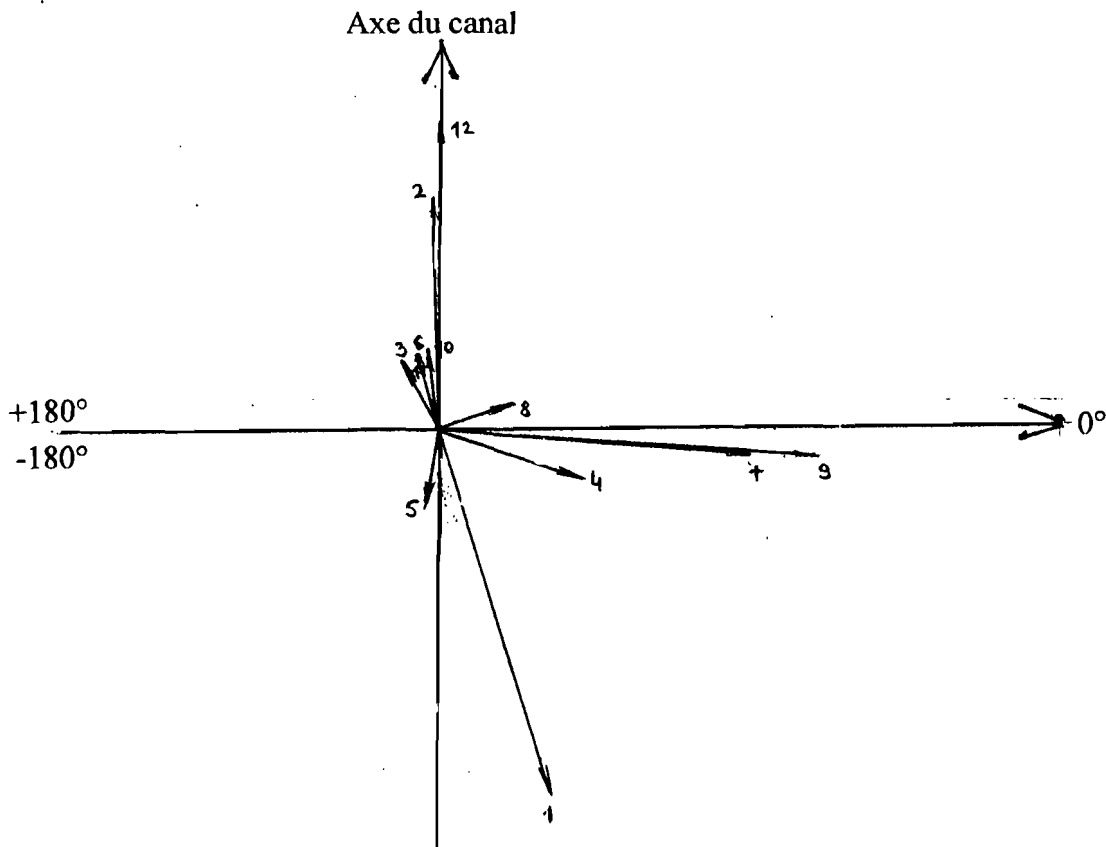


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 205 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes.)

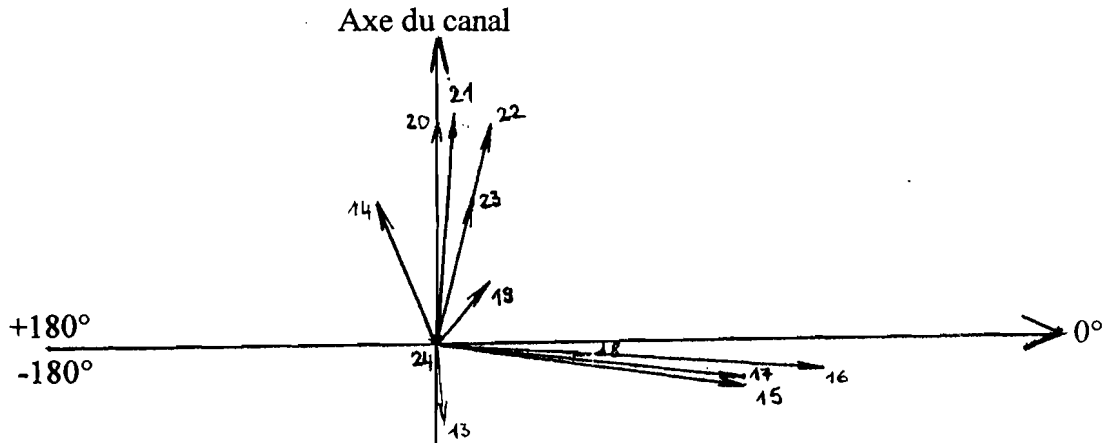


Noeud 175 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)



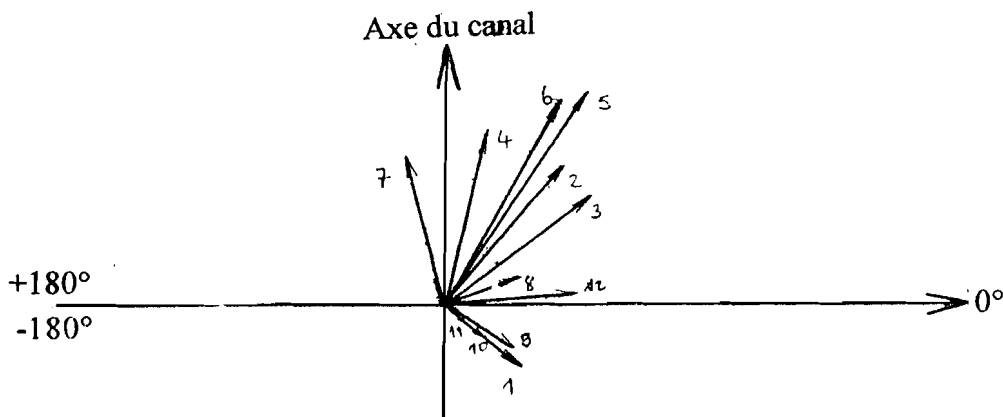
CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 175 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes.)



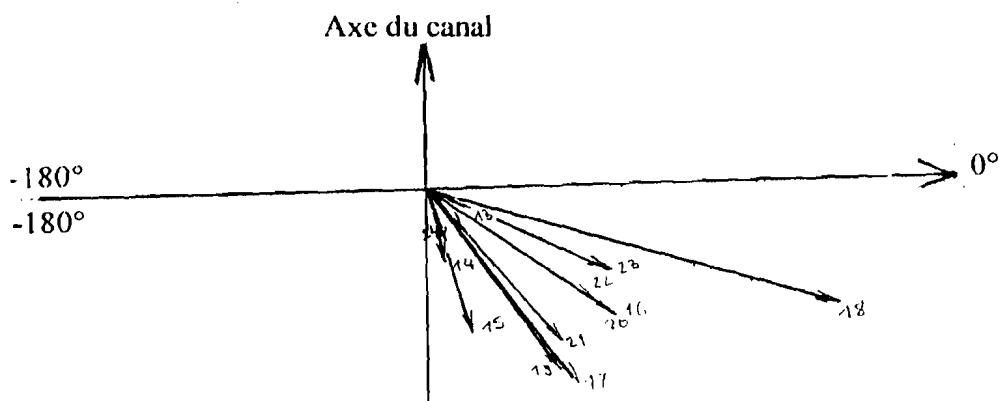
- Roses de courants données par les calculs faits à partir des mesures de courants issues de la couche C6.

Noeud 230 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)

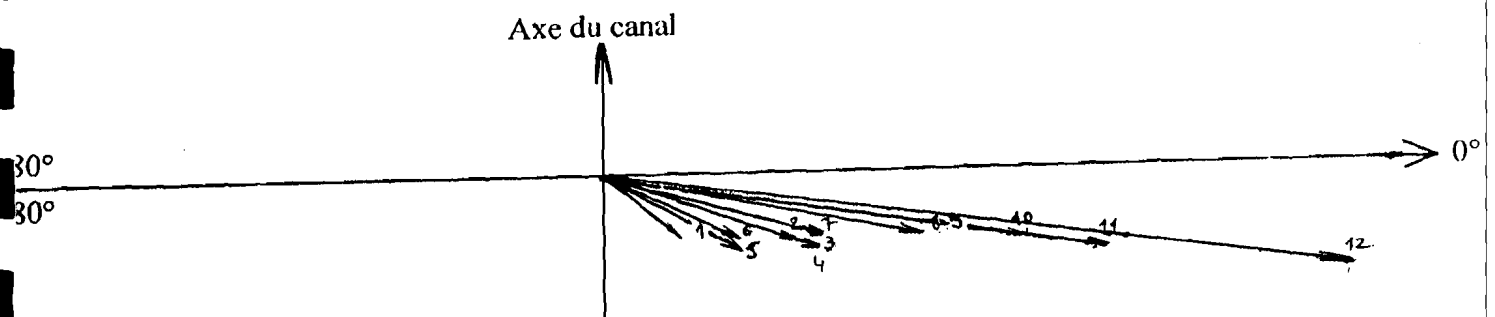


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 230 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes.)

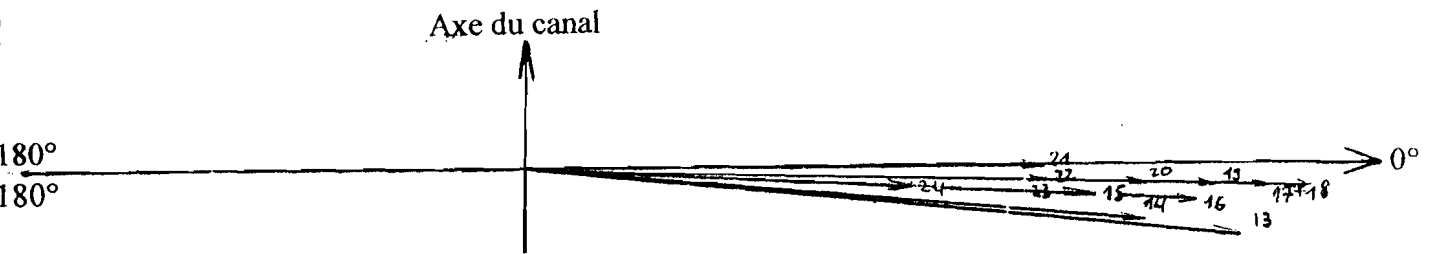


- Noeud 205 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)

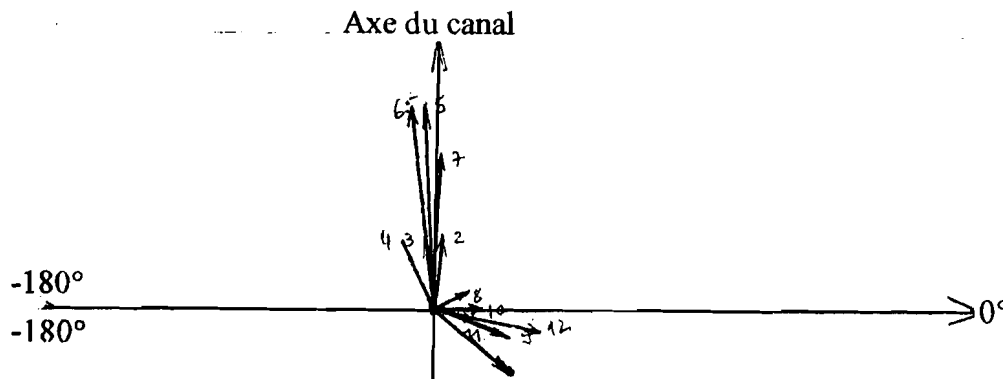


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

-Noeud 205 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes.)

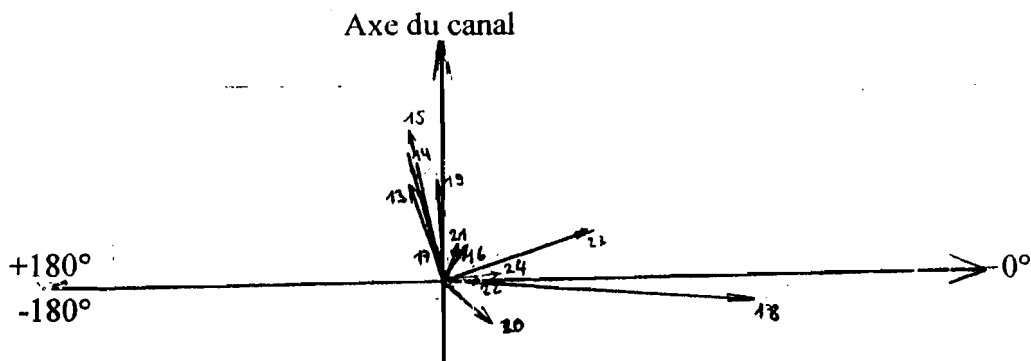


Noeud 175 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)



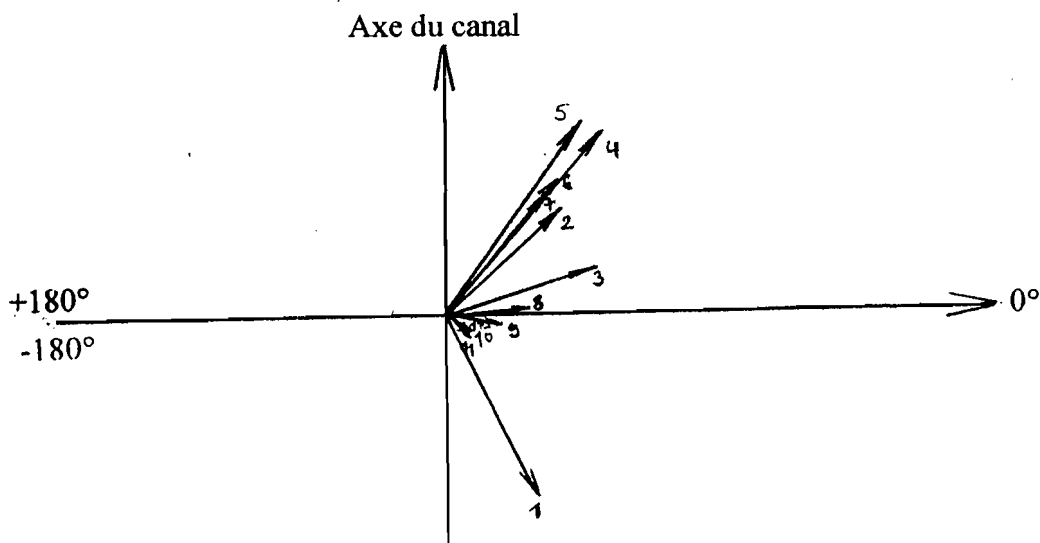
CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 175 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes à $t=43200$ secondes.)



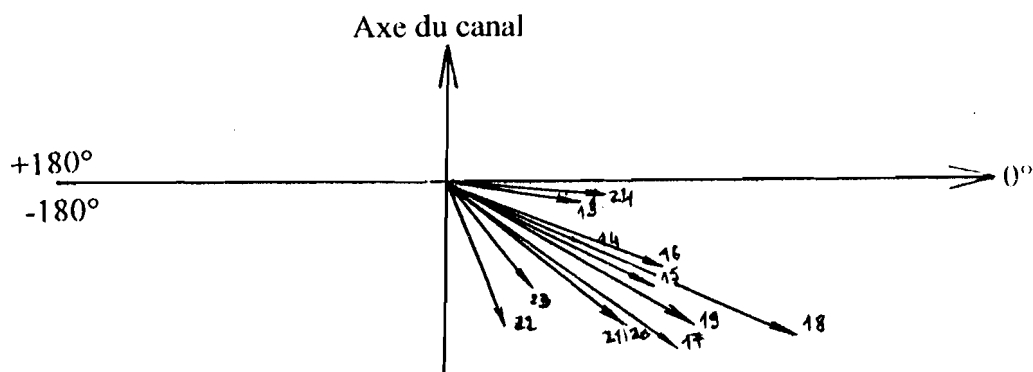
- Roses de courants données par les calculs faits à partir des mesures de courants issues de la couche C7.

Noeud 230 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes)

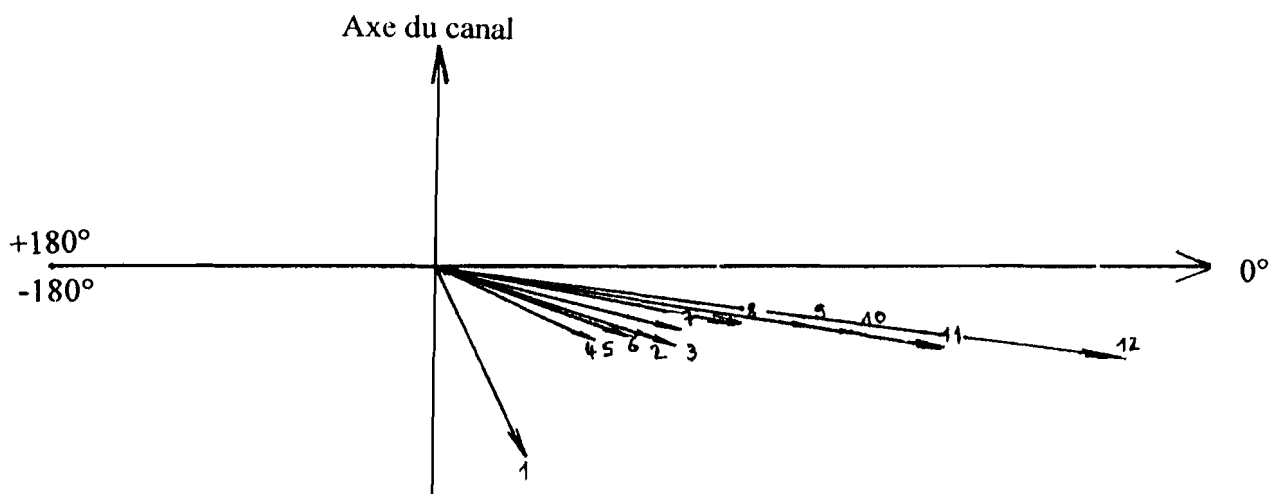


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 230 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes à $t=43200$ secondes.)

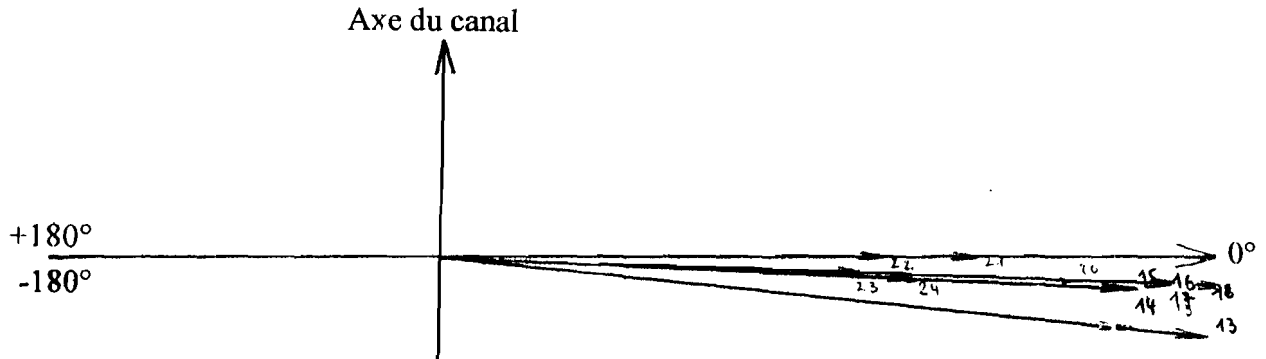


Noeud 205 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes)

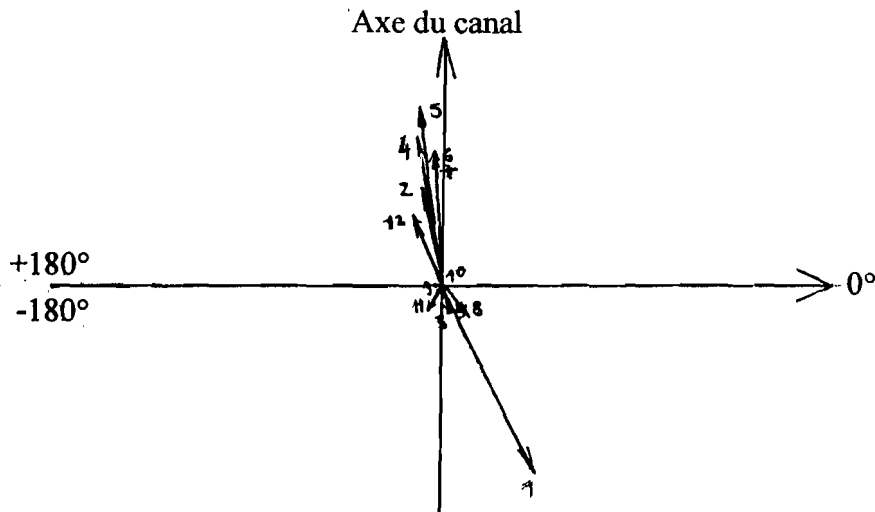


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 205 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes à $t=43200$ secondes.)

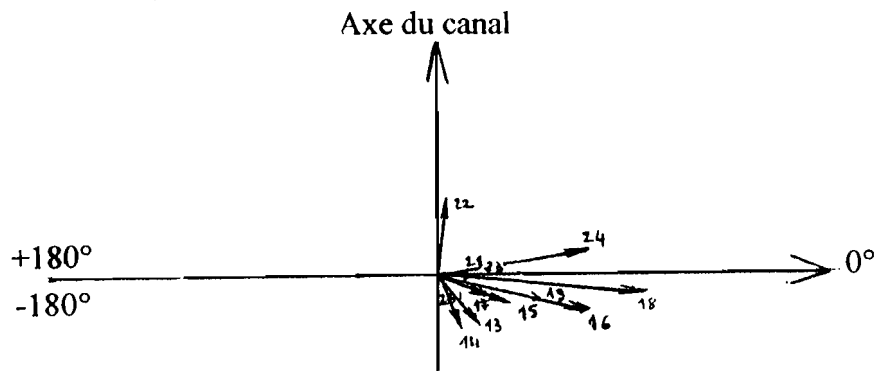


Noeud 175 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes)



CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

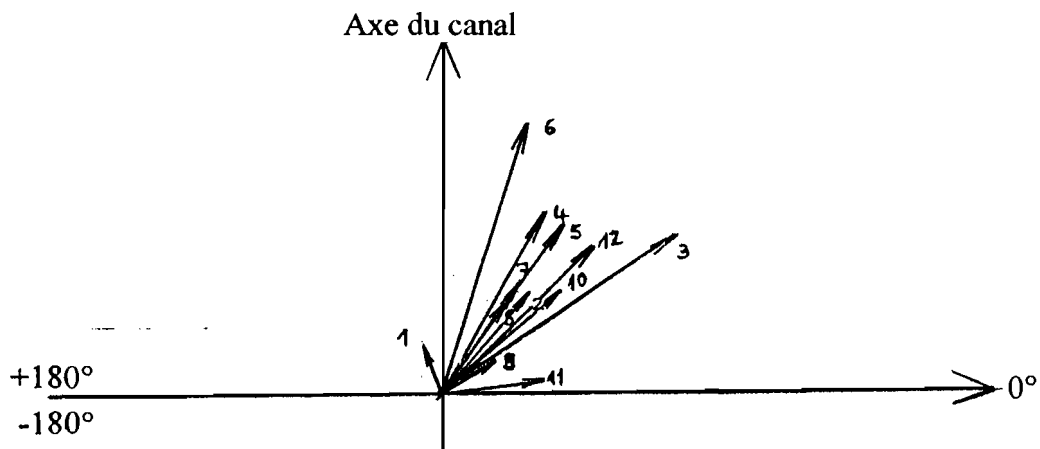
Noeud 175 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes.)



Cas non linéaire (avec les couches C3-C7)

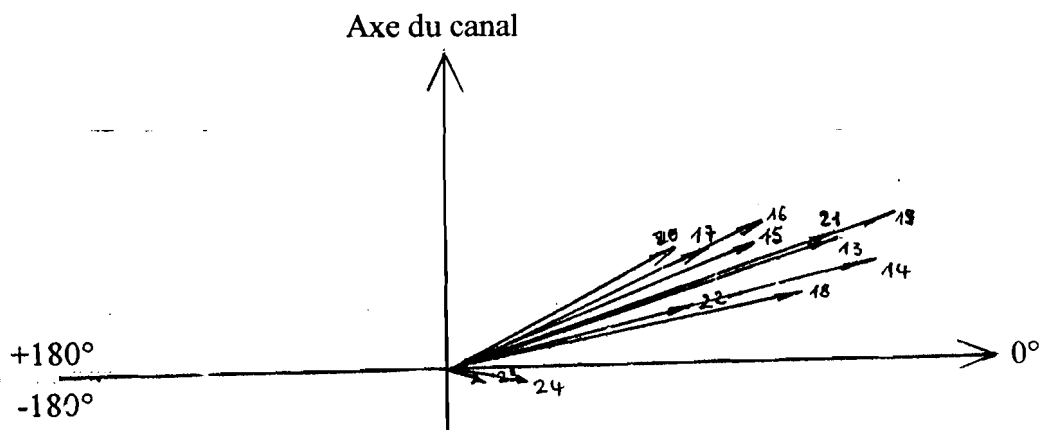
- Roses de courants données par les calculs faits à partir des mesures de courants issues de la couche C3.

Noeud 230 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)

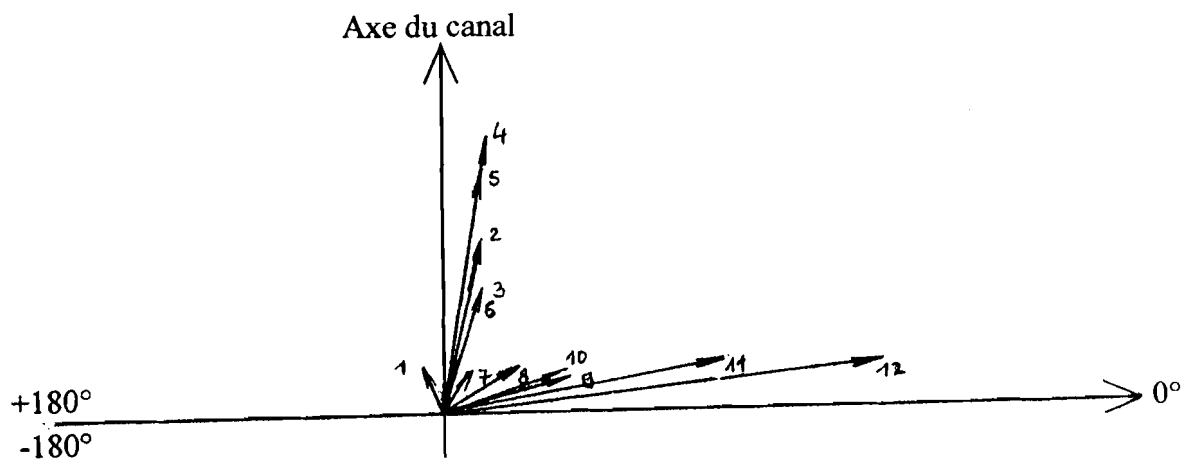


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 230 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes à $t=43200$ secondes)

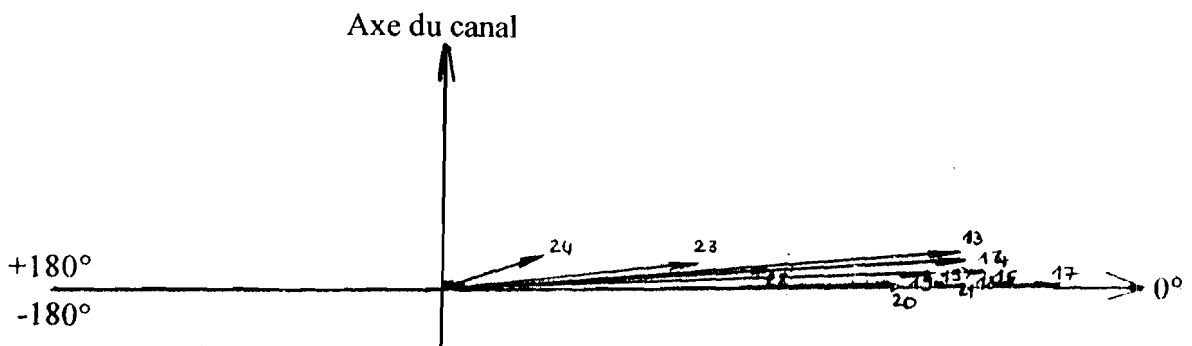


Noeud 205 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)

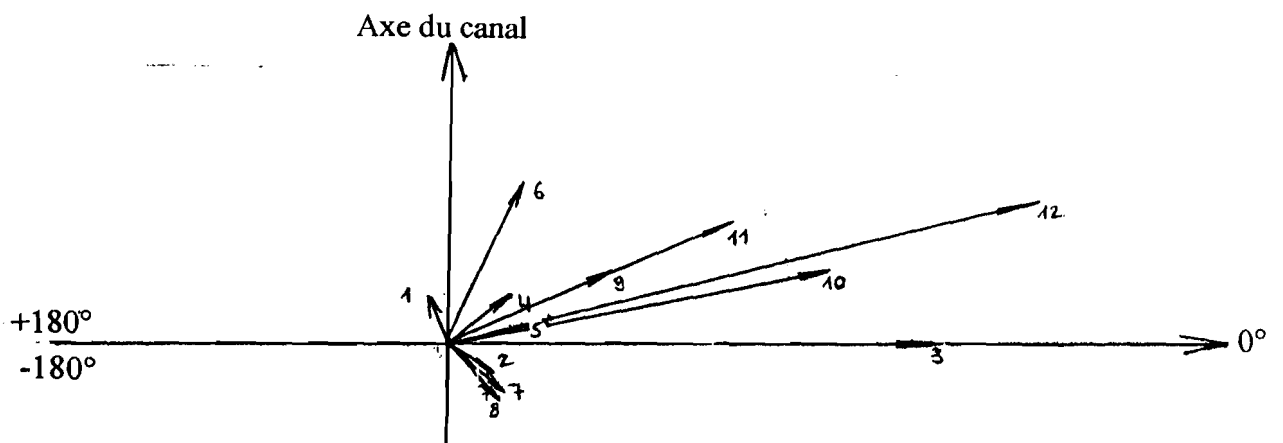


CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 205 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes)

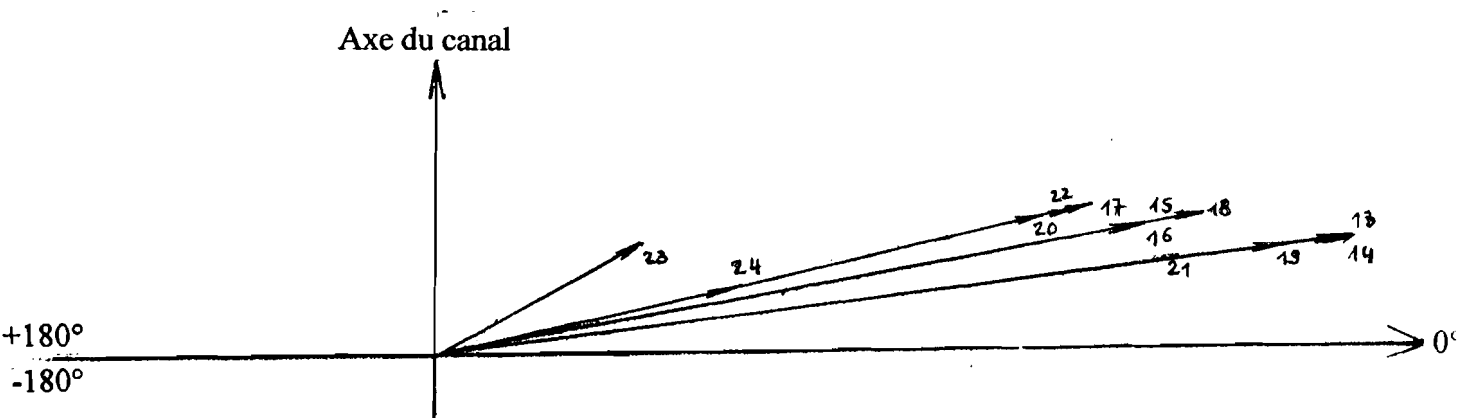


Noeud 175 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde. à $t=21600$ secondes.)



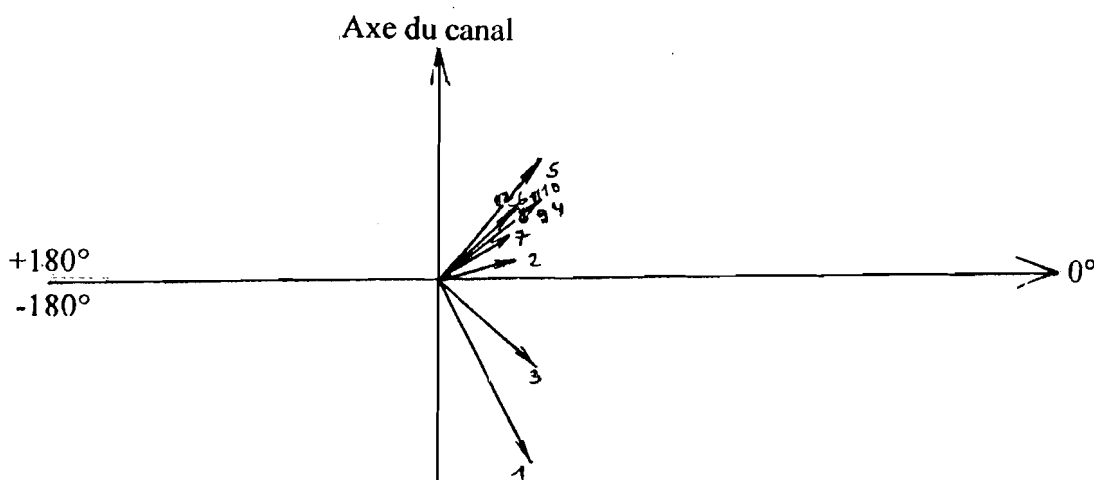
CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 175 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes à $t=43200$ secondes)



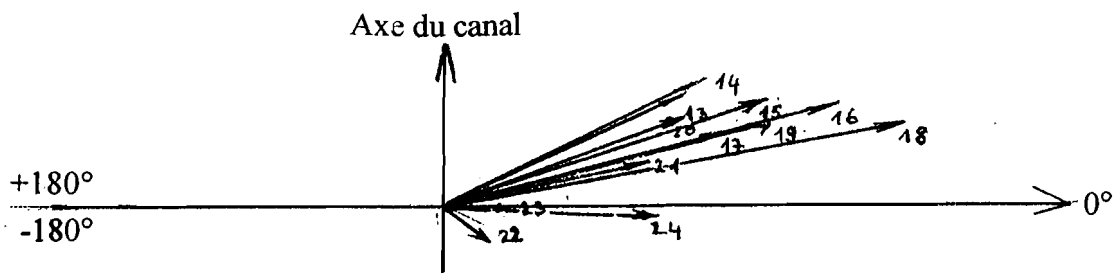
- Roses de courants données par les calculs faits à partir des mesures de courants issues de la couche moyenne (couche C7).

Noeud 230 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)

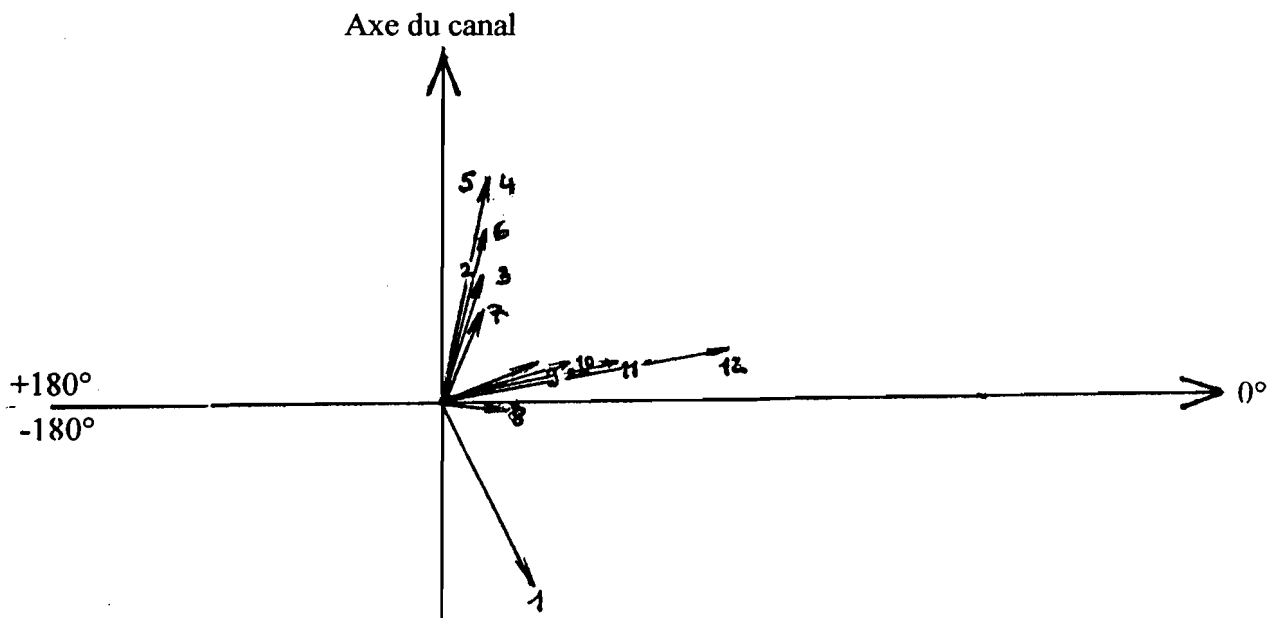


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 230 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes)

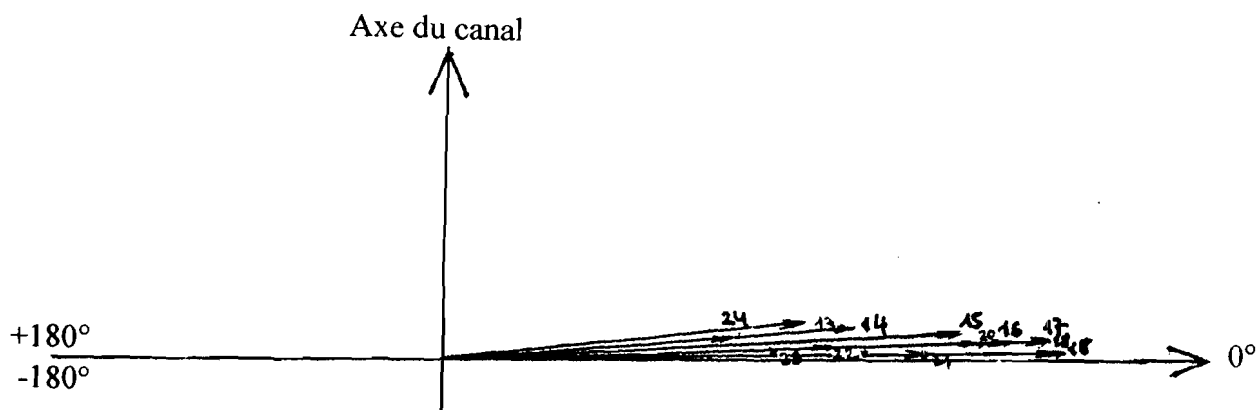


Noeud 205 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes.)

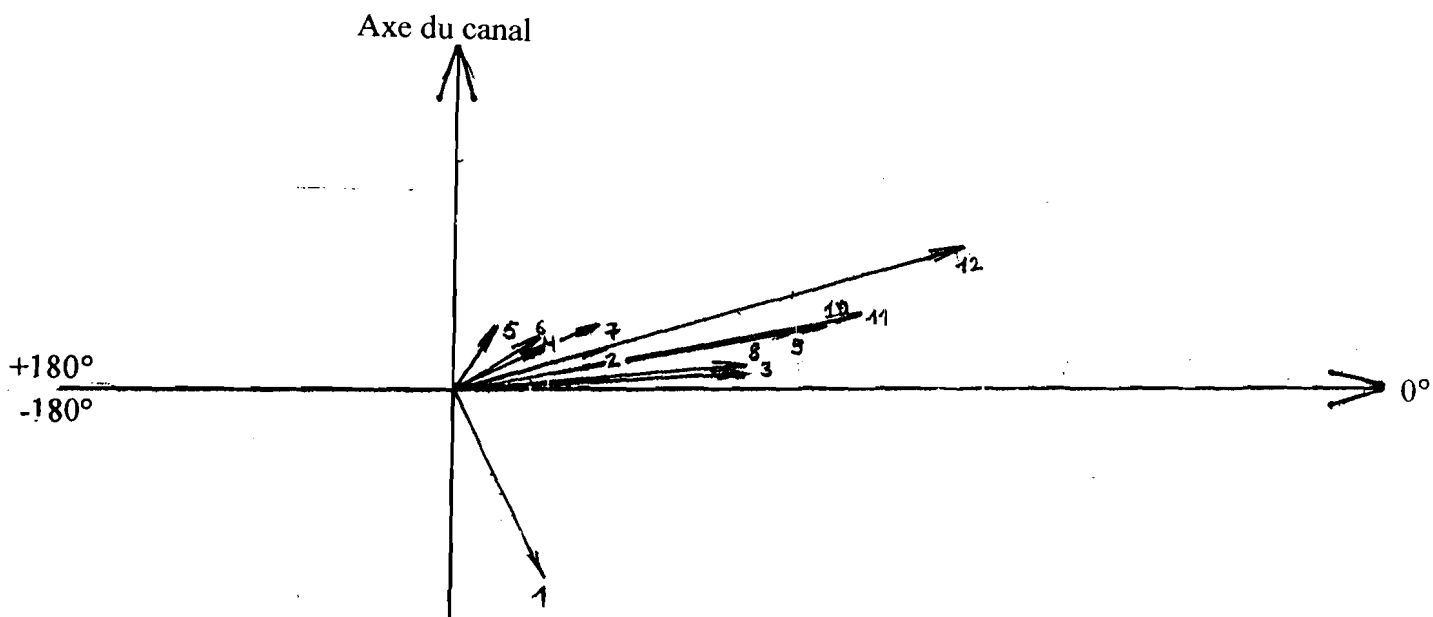


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 205 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes à $t=43200$ secondes)

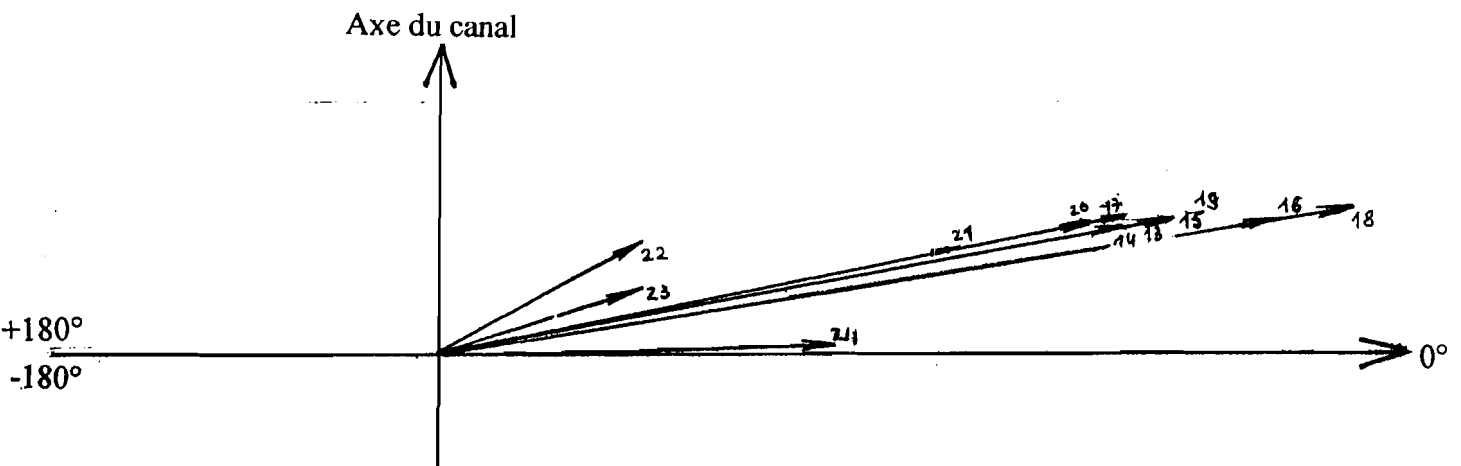


Noeud 175 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes)



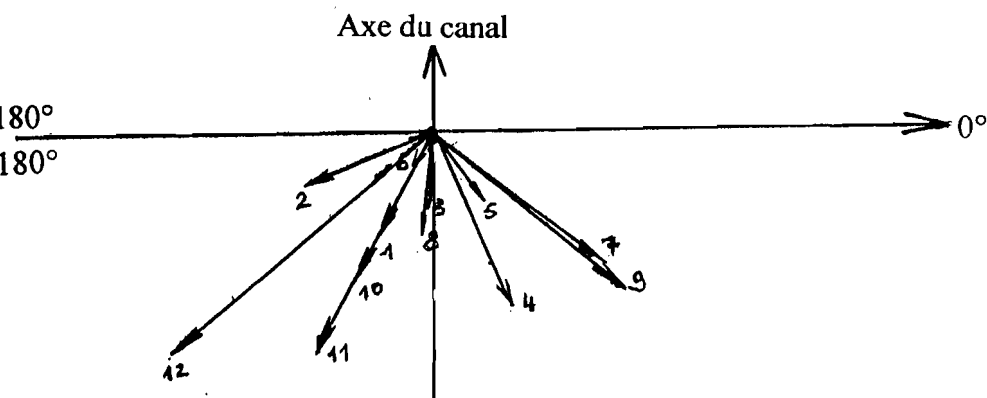
CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Noeud 175 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes à $t=43200$ secondes)



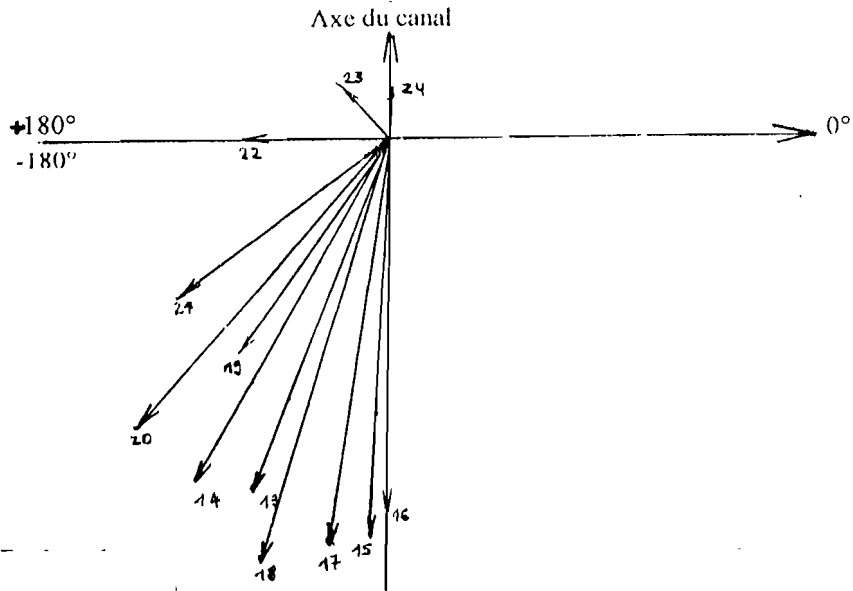
- Roses de courants issues des mesures de courants faites à partir des couches C1-C3-C6-C7.

Couche C1 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes)

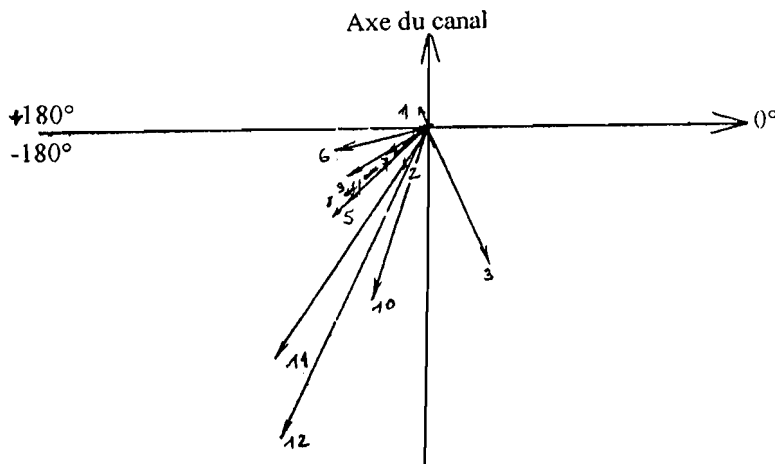


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Couche C1 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes)

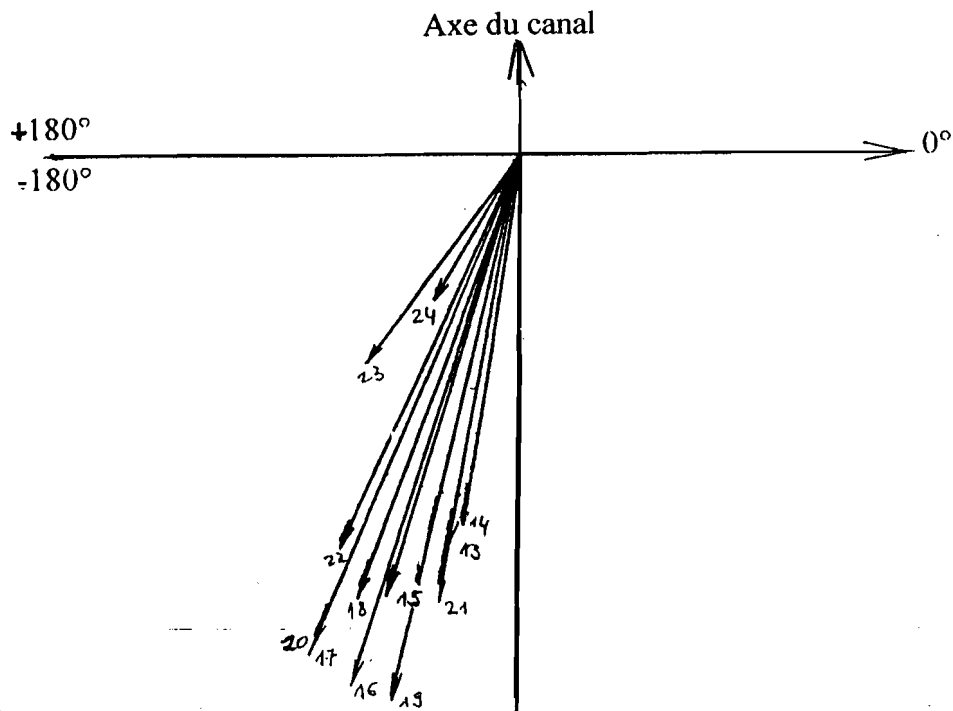


Couche C3 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde. à $t=21600$ secondes.)

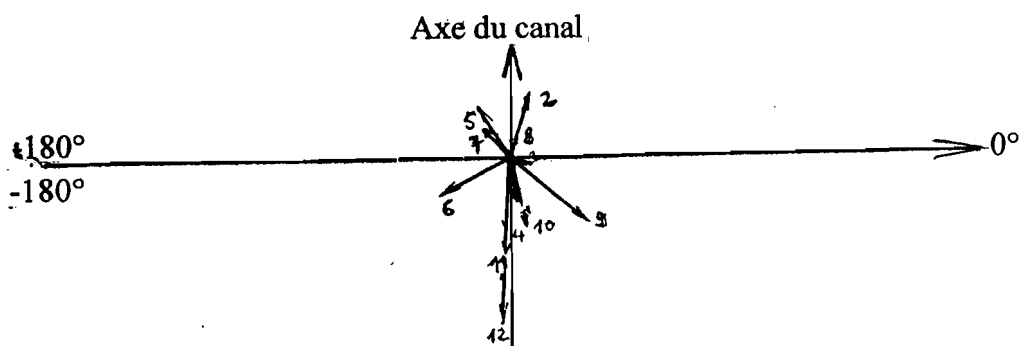


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Couche C3 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes à $t=43200$ secondes)

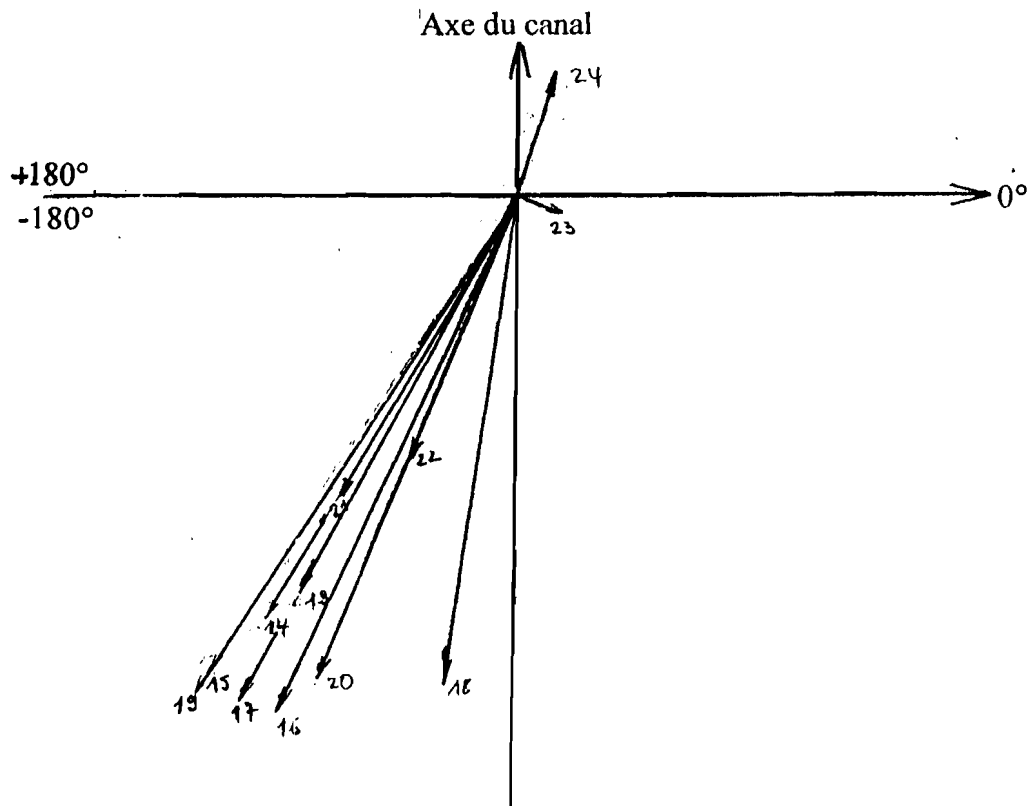


Couche C6 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde à $t=21600$ secondes)



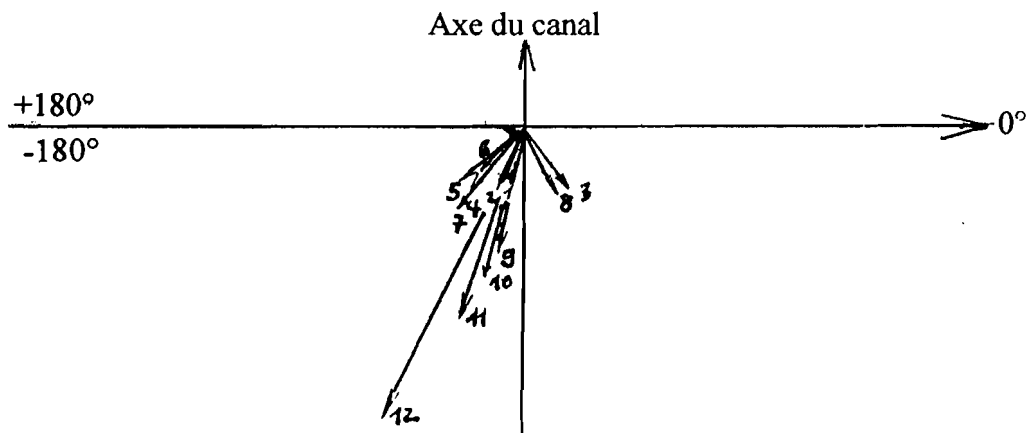
CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Couche C6 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes)

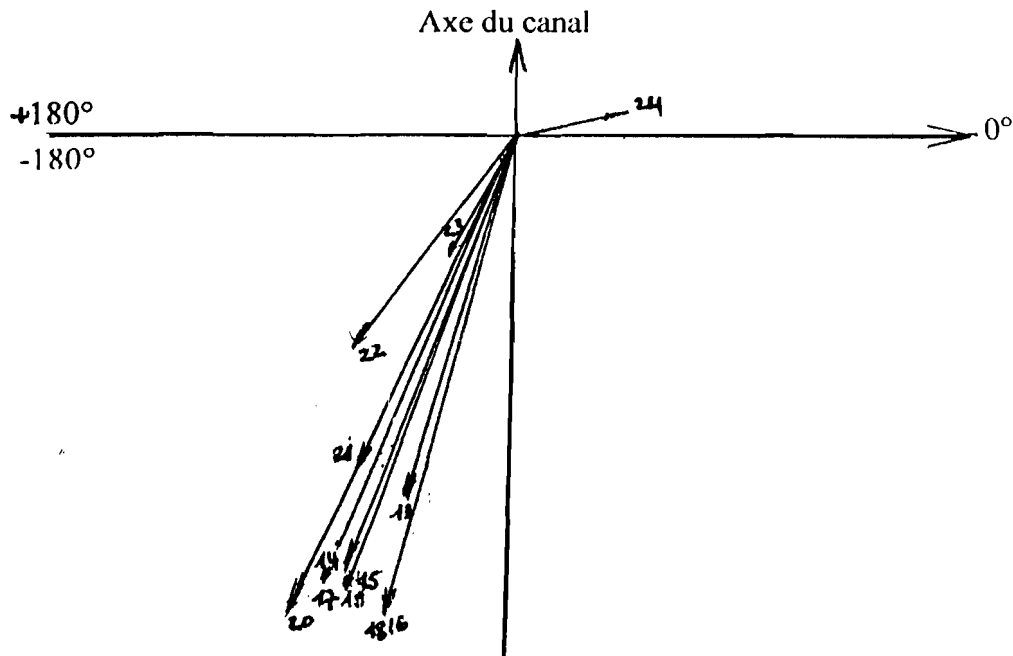


CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Couche C7 - Rose de courant durant le flot (de $t=0$ seconde. à $t=21600$ secondes.)



Couche C7 - Rose de courant durant le jusant (de $t=23400$ secondes. à $t=43200$ secondes)



Analyse et interprétations des courbes relatives aux courants

Pour mieux comprendre les phénomènes d'écoulement dans la lagune, et en particulier dans le canal de Vridi, nous avons procédé à des calculs dans différentes couches. Nous signalons que contrairement au cas des marées, nous ne disposons pas de données suffisantes au niveau des courants. Les données utilisées sont issues de mesures faites dans une seule zone du domaine d'étude (zone dans laquelle se trouve le noeud test 205). Ce sont ces mesures qui ont servi à la fois de conditions aux limites et de conditions initiales sur l'ensemble du domaine à cause du manque de données. Cette procédure aura certainement eu des influences sur les résultats que nous allons interpréter. Pour aller plus loin dans la connaissance de l'hydrodynamique, nous avons traité les cas linéaire et non linéaire. Les calculs dans le cas linéaire sont faits dans les couches C1, C6 et C7 dont les caractéristiques ont été données dans les interprétations des marées. Le cas non linéaire a été traité avec les couches C3 et C7.

Nous présentons ci-après les mesures et les directions des vitesses pour connaître leurs ordres de grandeurs et nous présentons aussi les roses de courants qui nous donnent la direction et la norme des courants par rapport à l'axe du canal qui fait environ 45° avec le Nord magnétique. Les roses de courants ont été représentées sur une période de 12 heures pendant laquelle nous observons une marée haute et une marée basse successives dans le canal. Les directions sont représentées par intervalle de 30 minutes, mais cela n'empêche pas de comprendre l'évolution des courants. Les numéros indiqués devant les vecteurs donnent l'ordre dans lequel se succèdent ces vecteurs. Ainsi, pour les directions qui seront comprises entre -180° et 0° , il y a écoulement de la mer vers la lagune et pour celles qui seront comprises entre 0° et 180° , nous aurons le phénomène contraire.

Considérons d'abord le cas linéaire. Et commençons par les mesures faites à la surface libre de l'eau (couche C1) :

- Au noeud 230, situé à l'entrée du canal, nous avons les vitesses qui valent 0.2 m/s pour les plus grandes et zéro pour les plus faibles. Les roses de courants nous indiquent, bien que la succession des directions ne soit pas ordonnée, qu'il y a écoulement vers la lagune. La plupart des directions sont comprises entre 0 et 180° . Nous observons des courants qui sont grands au début du flot et qui diminuent progressivement vers la fin du flot et changent de direction en s'annulant. Les directions qui se retrouvent entre -180° et 0° pourraient être dues aux perturbations à l'entrée du canal ; qui constitue un convergent en marée haute et un divergent en marée basse. 6 heures de temps après c'est à dire durant le reflux, nous constatons qu'il y a écoulement vers la mer. Les directions des courants sont tantôt Nord Est - Sud Ouest, tantôt Nord Est - Sud Ouest.

- Au noeud 205, localisé relativement loin de l'entrée et de la sortie du canal, les vitesses les plus importantes tendent vers 0.5 m/s. La comparaison des résultats

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

issus des calculs et de ceux issus des mesures montrent que les erreurs relatives sont importantes en marée basse ($> 50\%$) et faibles en marée haute (20% parfois). Ces écarts importants en période de reflux peuvent s'expliquer par le fait que pendant cette période, il y a en plus du retour des eaux marines, il y a aussi arrivée des eaux continentales. Aussi, bien que les erreurs pour la plupart du temps soient supérieures à 50%, les résultats ne sont forcément pas mauvais car des vitesses mesurées et des vitesses calculées du même ordre de grandeur pourraient même donner des erreurs au-delà de 50%. Les roses de courants nous indiquent qu'il y a en permanence écoulement vers la mer. Aucune des directions représentées n'est comprise entre 0 et 180° . Les mesures aussi le prouvent à travers les roses de courants. La seule différence réside dans le fait que les directions données par les calculs sont constamment N.O.-S.E. tandis que celles données par les mesures, sont soit N.O.-S.E, soit N.E-S.O durant le flot et N.O.-S.E pendant le reflux.

- Au noeud 175, situé à la sortie du canal (côté lagune), les vitesses maximales atteignent 0.2 m/s et ; elles s'annulent par moment. Les directions données par les roses de courants indiquent qu'il y a tantôt écoulement de la lagune vers la mer tantôt le cas contraire ; qu'on soit en marée haute ou en marée basse. Comme au noeud 230, les courants pourraient subir l'influence due aux perturbations dans cette zone. En effet, la sortie du canal se comporte comme un divergent au moment du flot et comme un convergent dans le cas contraire.

Prenons ensuite la couche C6 :

- Au noeud 230, les vitesses maximales atteignent 0.15 m/s et s'annulent quand les courants changent de sens. Les directions sont pour la plupart du temps comprises entre 0 et 180° , à part trois d'entre elles qui se trouvent orientées vers la mer ; il y a donc écoulement de la mer vers la lagune. En marée basse, toutes les directions sont N.O.-S.E, et comprises entre -180° et 0° . Il y a donc écoulement de la mer vers la lagune.

- Au noeud 205, les vitesses sont les grandes dans cette couche. Les plus élevées valent 0.4 m/s et les plus faibles tendent vers zéro. Les roses de courants indiquent qu'il y a en permanence écoulement vers la lagune. Les roses de courants données par les mesures montrent qu'il y a tantôt écoulement vers la mer tantôt vers la lagune en marée haute. Mais en marée basse, l'écoulement se fait uniquement vers la lagune. Cependant, les calculs ne sont pas loin de la réalité car durant le flot, il y a le maximum de directions qui sont orientées vers la lagune.

- Au noeud 175, les vitesses atteignent 0.15 m/s. Les roses de courants indiquent qu'en marée haute comme en marée basse l'écoulement à tendance à se faire vers la lagune. Les mesures par contre montrent qu'en marée haute l'écoulement se fait tantôt dans un sens tantôt dans l'autre ; et qu'en marée basse, il se fait uniquement vers la lagune.

Analysons maintenant ce qui se passe au niveau de la couche moyenne C7 :

- Au noeud 230, nous avons les vitesses qui atteignent 0.15 m/s et s'annulent

CHAPITRE 6. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

avant que les courants ne changent de sens. En marée haute, les courants ont pratiquement tous la direction S.O - N.E, la plupart des directions sont comprises entre 0 et 180°. Les courants qui sont dirigés vers la mer sont de faibles amplitudes. Au moment de la marée basse, les courants sont tous dirigés vers la lagune. Leur direction est N.O-S.E.

- Au noeud 205, les vitesses valent quelquefois 0.45 m/s. Ce sont les vitesses les plus élevés sur l'ensemble des couches au niveau des calculs. Les roses de courants montrent que l'écoulement se fait de la mer vers la lagune. La direction des courants est N.O-S.E. Au niveau des mesures, nous observons qu'il y a quasiment écoulement de la lagune vers la mer qu'on soit en marée haute comme en marée basse. Au niveau des calculs, la direction prédominante des courants est N.O-S.E, cependant pour les mesures, elle est N.E-S.O.

Intéressons maintenant aux résultats issus des calculs faits en non linéaire :

Analysons la couche C3 :

- Au noeud 230, les vitesses maximales valent 0.25 m/s. La direction principale des courants en marée basse comme en marée haute est S.O-N.E., c'est à dire qu'il y a en permanence écoulement de la mer vers la lagune.

-Au noeud 205, les vitesses les plus grandes valent 0.3 m/s et les plus faibles sont zéro. Les calculs font ressortir que l'écoulement se fait en permanence de la lagune vers la mer. La direction prédominante est S.O-N.E. Les mesures par contre indiquent que l'écoulement se fait dans le sens contraire, c'est à dire N.E-S.O.

- Au noeud 175, les vitesses sont de l'ordre de 0.5 m/s. Leur direction est quasiment S.O-N.E, c'est à dire qu'il y a écoulement quasiment de la mer vers la lagune.

Etudions enfin, les résultats issus ce la couche C7.

- Au noeud 230, les vitesses maximales tendent vers 0.2 m/s et les plus faibles valent zéro. Les calculs nous indiquent que l'écoulement se fait presque tout le temps de la mer vers la lagune ; et la direction prédominante des courants est S.O-N.E pour les deux phases de la marées.

- Au noeud 205, les vitesses maximales se situent entre 0.25 m/s et 0.3 m/s. Les calculs nous donnent la direction S.O-N.E comme direction prédominante. L'écoulement se fait donc de la mer vers la lagune en période de flot comme en période de reflux. Les mesures donnent presque les mêmes conclusions sauf que la direction prédominante dans ce cas est N.E-S.O.

- Au noeud 175, les vitesses atteignent 0.5 m/s. La direction principale est S.O.-N.E, ce qui signifie qu'il y a écoulement en permanence de la mer vers la lagune.

Conclusion sur l'analyse des courants :

Au terme de cette analyse, nous remarquons que bien qu'il ait des erreurs relatives non négligeables, le modèle nous donnent des renseignements intéressants sur la direction des courants. Les résultats sont beaucoup plus significatifs dans le cas linéaire que dans le cas non linéaire. Le cas linéaire nous indique aux noeuds pour

CHAPITRE 6. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT EN 2D PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

lesquels nous ne disposons pas de mesures pour tirer des conclusions poussées sur le comportement des courants, qu'il y a tantôt écoulement de la mer vers la lagune tantôt de la lagune vers la mer. En plus pour le noeud 205 où les mesures sont faites, les calculs dans le cas linéaire montrent qu'il y a écoulement en permanence vers la mer. Dans le cas non linéaire, on observe que l'écoulement est en permanence vers la lagune en tous les noeuds tests quelle que soit la période.

Conclusion partielle

Le modèle numérique 2D a été développé pour simuler les marées et les courants dans la lagune. Les algorithmes de Runge-kutta et de Prédiction-Correction sont utilisés pour la simulation. Les tests effectués sur différentes couches dans les cas linéaire et non linéaire montrent bien que les résultats numériques collent parfaitement avec les mesures in situ au niveau des trois noeuds de références considérés. Le modèle développé peut ainsi simuler parfaitement les marées et vient donc apporter un plus dans la recherche de la maîtrise de l'hydrodynamique de la lagune Ebrié.

Les résultats obtenus par le calcul des courants expliquent bien les phénomènes de flux et de reflux de la marée au niveau des trois noeuds de références considérés. Le modèle permet de confirmer des conclusions faites par simple observation de mesures de courants [8]. Il vient donc aider à la compréhension des phénomènes de marées et des courants de circulation dans la lagune Ebrié.

Nous pouvons dire que les résultats obtenus avec le modèle donne satisfaction en ce qui concerne les marées. Quant aux courants qui, malgré qu'ils soient inférieurs aux valeurs mesurées (les erreurs relatives calculées pour tous les trois noeuds tests sont au-dessus des 20 %), ils expliquent les phénomènes d'écoulement dans le canal. Ils sont cependant à améliorer. Il faut signaler que nous ne disposons pas de données suffisantes au niveau des courants. Il serait intéressant de rechercher des données fiables et complets pour étendre notre étude à toute la rade portuaire.

Chapitre 7

Condition de Radiation Pour le Canal de Vridi à Abidjan, Côte d'Ivoire

Le travail présenté dans cette partie, traite des conditions aux limites aux frontières ouvertes pour un canal. En effet, dans les modèles hydrodynamiques, les conditions aux limites constituent une véritable difficulté surtout pour les frontières ouvertes. A cela, il faut ajouter les données qui ne sont toujours pas disponibles au niveau des frontières. Pour apporter une solution à ces problèmes, nous présentons dans le travail ci-après, un modèle hydrodynamique dans lequel, on introduit un forçage traduisant l'influence des fluctuations de courants lagunaires et de la marée sur l'élévation de la hauteur d'eau dans un canal ayant une ouverture sur la mer. La méthode utilisée pour la simulation numérique est celle des différences finies. Le choix s'est porté sur cette méthode compte tenu de son grand succès dû à la latitude du choix du pas de temps.

Condition de Radiation Pour le Canal de
Vridi à Abidjan, Côte d'Ivoire
Radiation Condition For Vridi Channel in
Abidjan, Ivory Coast

Emile DANHO, Kouassi K. Serge YANGA, Jean Marie ZOKAGOA,
Arthur N'dri KONAN, Roger N'dri DJUE
Université de Cocody
UFR de Mathématiques et Informatique
Laboratoire de Mécanique
22 BP 582 Abidjan 22 Côte d'Ivoire

22 Décembre 2006

Abstract

This report describes the improvement of the prediction of water level in the Vridi channel (Ivory-Coast) by a best taking into account of the open boundaries. The major finding is a new forcing condition introduced at the channel open/ocean boundary due to the abrupt constraint effects at the entrance of the channel as well as the effects of the lagoon currents flowing out and into the channel during the flood and ebb tides. Indeed, the adding of this forcing condition to the radiation condition of Blumberg and Kantha [3], leads to a best prediction of water level in the Vridi channel.

Key words: Vridi Channel; radiation condition; forcing; hydrodynamics.

CHAPITRE 7. CONDITION DE RADIATION POUR LE CANAL DE VRIDI À ABIDJAN, CÔTE D'IVOIRE

turbulente horizontale et verticale. Ces derniers coefficients selon A. F. Blumberg et G. L. Mellor [1] [2] s'écrivent :

$$(2) \begin{cases} \nu_h = \alpha S_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \nu_v = \chi_1 l q, \end{cases}$$

où α est une constante arbitraire de l'ordre de 0.05 et χ_1 de l'ordre de 0.4. S_0 est une constante ayant les dimensions d'une surface et calculée dans le test numérique par le procédé de Smangorisky qui consiste à la considérer comme étant égale au produit du pas d'espace dans la direction ox par celui dans la direction oy . Dans la pratique, ν_h est de l'ordre de $0.001m^2/s$ et ν_v de l'ordre de $0.01m^2/s$; $q^2/2$ est l'énergie cinétique turbulente et l la longueur de mélange vérifiant les équations

$$\frac{\partial q^2}{\partial t} + \frac{\partial(uq^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vq^2)}{\partial y} + \frac{\partial(wq^2)}{\partial z} = 2\nu_v \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_v \frac{\partial q^2}{\partial z} \right) + \frac{2g}{\rho} \varepsilon_v \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{2q^3}{B_1 l},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q^2 l)}{\partial t} + \frac{\partial(uq^2 l)}{\partial x} + \frac{\partial(vq^2 l)}{\partial y} + \frac{\partial(wq^2 l)}{\partial z} &= E_1 l \nu_v \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_v \frac{\partial(q^2 l)}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{2g}{\rho} E_1 \varepsilon_v \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{q^3}{B_1} \tilde{W}, \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \chi_2 l q, \\ \tilde{W} &= 1 + E_2 \left(\frac{l}{KL_m} \right); \frac{1}{L_m} = \frac{1}{\zeta - z} + \frac{1}{H + z}, \\ B_1 &\simeq 16.6, \\ K &\simeq 0.4 \text{ désigne la constante de Von Karman,} \\ E_1 &\simeq 1.8 \text{ et } E_2 \simeq 1.33, \\ \chi_1 &\simeq 0.4 \text{ et } \chi_2 \simeq 0.5. \end{aligned}$$

7.2.2 Conditions aux limites

- A la surface libre eau/air, la condition d'interface s'exprime à travers un modèle de frottement dû au vent :

$$(3) \quad \begin{cases} \rho\nu_v \frac{\partial u}{\partial z} = \rho_a C_f W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \\ \text{et} \\ \rho\nu_v \frac{\partial v}{\partial z} = \rho_a C_f W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2}, \end{cases}$$

résultant de l'application de la loi de paroi à la partie du fluide atmosphérique proche de la surface de l'eau en tenant compte des contraintes de frottement de l'air. C_f qui est de l'ordre de 0.025 représente le coefficient de friction du vent, ρ_a la masse volumique de l'air, ρ celle de l'eau, et \vec{W} (W_x, W_y) la vitesse du vent juste au dessus du système lagunaire.

Par ailleurs, en considérant (ζ) la dénivellation en surface, les conditions cinématiques sur la vitesse verticale à la surface permettent d'écrire la relation suivante :

$$(4) \quad w(z = \zeta) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u(z = \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v(z = \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

L'approximation 2 - D en surface ($w(z = \zeta) = 0$) conduit alors à la dérivation de l'équation d'évolution de la marée s'écrivant :

$$(5) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0,$$

où $u_\zeta = u(z = \zeta)$ et $v_\zeta = v(z = \zeta)$.

- Au fond du canal la relation entre le vecteur de cisaillement et l'énergie cinétique s'écrit :

$$(6) \quad \tau_p = (\tau_x, \tau_y, 0) = \rho \frac{C}{2} \|\vec{U}\| \vec{U},$$

avec

$$(7) \quad C = 0.027 \left(\frac{\nu}{u R_h} \right)^{1/4} \quad (\text{ formule de Schlichting [9] },)$$

où R_h est le rayon hydraulique et \vec{U} , la vitesse moyenne de l'écoulement.

- Les autres frontières ouvertes sont des frontières artificielles fluides. Les conditions aux limites y sont généralement obtenues par mesures ou par la méthode de radiation.

A la frontière fluide, les mesures sont peu ou pas disponibles. Il est donc nécessaire, pour obtenir des données pour la frontière du domaine, d'utiliser une condition de radiation. Elle consiste à définir une équation permettant de simuler la vitesse aux points de contact fluide. L'inconnue Φ à la frontière est supposée se comporter comme une onde qui se propage avec une vitesse de phase $C_p(\Phi)$ à estimer.

La condition de radiation pour les composantes de la vitesse est celle proposée par Orlanski (1976) [7] et s'écrit :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + C_p(u) \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + C_p(v) \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + C_p(w) \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \end{cases}$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ est l'opérateur de dérivée normale.

Pour chaque composante Φ de la vitesse, la vitesse de phase $C_p(\Phi)$ dans (8) n'est pas une constante et va être fonction des hauteurs de marées et du transfert de

CHAPITRE 7. CONDITION DE RADIATION POUR LE CANAL DE VRIDI À ABIDJAN, CÔTE D'IVOIRE

masse à travers la frontière. Elle est évaluée à travers le test numérique et calculée à partir de la formule

$$C_p(\Phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} / \frac{\partial\Phi}{\partial n}.$$

Dans l'équation ci-dessus, les dérivées sont supposées avoir été calculées au pas de temps précédent du processus numérique, et leurs estimations sont en fait obtenues à partir des valeurs calculées aux points situés au voisinage très proche de la frontière fluide/fluide. Le processus de calcul de $C_p(\Phi)$ peut être ainsi résumé : d'abord, la vitesse de phase est calculée à partir des valeurs de Φ obtenues aux pas de temps précédents à proximité de la frontière par l'algorithme de Z. Kowalik [7] ci-dessous :

$$C_p(\Phi) = \begin{cases} \frac{h}{T_a} \frac{\Phi_{b-1}^{(n)} - \Phi_{b-1}^{(n-1)}}{\Phi_{b-1}^{(n)} - \Phi_{b-2}^{(n)}}, & \text{pour } 0 \leq C_p(\Phi) \leq \frac{h}{T_a} \\ \frac{h}{T_a}, & \text{pour } C_p(\Phi) > \frac{h}{T_a} \\ 0, & \text{pour } C_p(\Phi) < 0 \end{cases}$$

où Φ_b est la valeur qu'aurait Φ à la frontière fluide, h le pas d'espace et T_a le pas de temps.

Dans ce processus et dans une première phase, $C_p(\Phi)$ est calculée de sorte que la vitesse de l'onde ne soit pas supérieure à la vitesse locale moyenne $\frac{h}{T_a}$ de propagation des ondes numériques. Une telle vitesse supérieure de l'onde se traduirait par un important, mais irréaliste transfert de matière hors du domaine de calcul. La vitesse de phase $C_p(\Phi)$ ne doit pas aussi être négative pour ne pas générer des pollutions numériques de réflexion d'onde, car cela consisterait en une accumulation non physique de matière dans le domaine de calcul ; ce qui se traduirait par la présence d'un bruitage du processus numérique.

Dans une deuxième phase, la nouvelle valeur de la fonction à la frontière notée Φ_b est calculée selon un schéma explicite à deux niveaux et du second ordre de Lax-wendroff.

La condition aux points de contact fluide pour la marée est généralement donnée par la condition de radiation de Blumberg & Kantha [3] :

$$(9) \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} + c \frac{\partial\zeta}{\partial n} = -\frac{\zeta - \eta}{T_f},$$

dans laquelle $c = \sqrt{gH}$ représente la célérité de l'onde de marée, η un forçage résultant des effets conjugués des astres par rapport à la terre du caractère semi-diurne ou diurne de la marée [6], et T_f (exprimée en secondes) la période de marée représentant l'échelle de temps caractéristique des phénomènes introduits par la marée au point de frontière artificielle fluide/fluide. T_f est de l'ordre de 12h30mn à l'entrée du canal de Vridi.

D'après[5] et [6], $\eta = 0.65 \cos(\frac{2\pi}{T_l}t) + 0.29 \cos(\frac{2\pi}{T_s}t)$ pour Abidjan, avec T_l et T_s représentant respectivement la période lunaire et la période solaire.

D'autre part, le canal de Vridi ayant une de ses extrémités donnant sur la mer, l'entrée ou le retour d'eau, lors de la haute marée ou de la basse marée engendre un forçage important et la relation (9) ne peut plus être utilisée à cette frontière sans

CHAPITRE 7. CONDITION DE RADIATION POUR LE CANAL DE VRIDI À ABIDJAN, CÔTE D'IVOIRE

ajustement. En effet l'utilisation de cette équation par K. K. S. Yanga [10] et N. A. Konan [6] a conduit à des résultats qui s'écartaient énormément des mesures observées (fig.2). Le but du présent travail est donc de proposer un ajustement approprié pour simuler ce forçage dans le cas du canal de Vridi. Nous convenons de corriger (9) en prenant en compte un forçage $F(t, x, y)$ en plus de celui déjà présent par le terme $-\frac{\zeta-\eta}{T_f}$ et qui traduisait les effets lunaire et solaire, de sorte à obtenir :

$$(10) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + c \frac{\partial \zeta}{\partial n} = -\frac{\zeta-\eta}{T_f} + F(t, x, y).$$

Nous proposons pour ce forçage complémentaire $F(t, x, y)$, une superposition d'harmoniques dont l'une $H_1(t, x, y)$ traduit une incidence et l'autre $H_2(t, x, y)$, une réflexion :

$$(11) \quad H_1(t, x, y) = \alpha_1 \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \beta_1(x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)\right]$$

et

$$(12) \quad H_2(t, x, y) = \alpha_2 \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \beta_2(-x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2)\right],$$

avec $0 \leq \theta_1, \theta_2 < \pi/2$ et $x > 0$; α_1 et α_2 sont des amplitudes, β_1 et β_2 , des coefficients de correction.

$F(t, x, y)$ s'écrit alors :

$$(13) \quad F(t, x, y) = \alpha_1 \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \beta_1(x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)\right] + \alpha_2 \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \beta_2(-x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2)\right],$$

où $T = \frac{L}{\sqrt{gH}}$, avec L la longueur du canal et H la profondeur moyenne du canal.

Dans (11) et (12), les valeurs de α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , θ_1 , et θ_2 sont obtenues par une optimisation lors du test numérique. En effet, en fixant tour à tour les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta_1$ et θ_2 de l'équation (13), nous déterminons pour chacun de ces coefficients, une plage de valeurs nous rapprochant de l'allure de la marée obtenue à partir de quelques mesures que nous entrons dans le programme. Les valeurs que nous retenons sont celles pour lesquelles nous approchons au mieux les courbes des mesures. Par ce processus, les valeurs optimales trouvées s'avèrent être :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0.009 \\ \alpha_2 = 0.009 \\ \beta_1 = 1.25 \\ \beta_2 = 0.95 \\ \theta_1 = 20^\circ \\ \theta_2 = 0^\circ. \end{array} \right.$$

Ce sont ces valeurs qui vont être utilisées dans la suite lors des tests numériques pour valider le modèle en d'autres points de mesure qui n'avaient pas été utilisés pour le test d'optimisation des paramètres. Elles vont aussi être utilisées pour la simulation dans tout le domaine.

7.3 Résolution numérique

7.3.1 Maillage du canal

La surface libre du canal peut être considérée comme un rectangle de longueur 2700 m et de largeur 370 m. En tenant compte de la profondeur (15m), un point $M(x, y, z)$ du canal sera représenté par $M(ih, jp, kq)$ ou encore par $M_{i,j,k}$ avec h , p et q représentant respectivement les pas d'espace suivant x , y et z .

7.3.2 Discrétisation des équations et des conditions aux limites

Cette discrétisation est faite selon le schéma de CRANK-Nicholson et de Lax. Considérons les opérateurs suivants :

$$(14) \quad \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j,k}^{(n)} = \tilde{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j,k}^{(n)},$$

$$(15) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)_{i,j,k}^{(n)} = \tilde{u} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)_{i,j,k}^{(n)},$$

$$(16) \quad D_x^n(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j,k}^{(n)} = u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(n)} - u_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(n)},$$

$$(17) \quad D_y^n(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j,k}^{(n)} = u_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(n)} - u_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(n)},$$

$$(18) \quad D_z^n(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{i,j,k}^{(n)} = u_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(n)} - u_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(n)},$$

$$(19) \quad E_x^n(u) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)_{i,j,k}^{(n)} = u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(n)} - 2u_{i,j,k}^{(n)} + u_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(n)},$$

$$(20) \quad E_y^n(u) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)_{i,j,k}^{(n)} = u_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(n)} - 2u_{i,j,k}^{(n)} + u_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(n)},$$

$$(21) \quad E_z^n(u) = \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)_{i,j,k}^{(n)} = u_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(n)} - 2u_{i,j,k}^{(n)} + u_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(n)},$$

$$\text{où} \quad \tilde{u} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j,1} + u_{i-1,j,1} + u_{i,j+1,1} + u_{i,j-1,1}).$$

Les différentes équations régissant l'écoulement du canal peuvent donc se discrétiser pour tout n tel que $nT_a \in [0, \tilde{T}]$, T_a étant le pas de temps et \tilde{T} , la période de la simulation. L'équation d'évolution de la dénivellation en surface du canal par exemple s'écrit :

$$(22) \quad \zeta_{i,j}^{(n+1)} = \zeta_{i,j}^{(n)} - \frac{\tilde{u}_\zeta T_a}{2h} D_x^n(\zeta) - \frac{\tilde{v}_\zeta T_a}{2p} D_y^n(\zeta),$$

$$(23) \quad \tilde{u}_\zeta = \frac{1}{4}(u_{i+1,j,1} + u_{i-1,j,1} + u_{i,j+1,1} + u_{i,j-1,1}),$$

CHAPITRE 7. CONDITION DE RADIATION POUR LE CANAL DE VRIDI À ABIDJAN, CÔTE D'IVOIRE

$$(24) \quad \tilde{v}_\zeta = \frac{1}{4}(v_{i+1,j,1} + v_{i-1,j,1} + v_{i,j+1,1} + v_{i,j-1,1}),$$

schéma dont la stabilité est fonction de la condition de CFL suivante :

$$(25) \quad gT_a\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{p}\right) < 1.$$

Discretisons à présent les conditions aux limites aux frontières ouvertes du canal.

L'entrée du canal donne sur l'Océan Atlantique et la sortie est en contact avec la lagune. Ce sont des frontières fluide-fluide, donc des frontières ouvertes :

-à l'entrée du canal ($i = 1$) :

pour la discrétisation de la condition de radiation d'Orlando simulant la vitesse, le schéma de Z.Kowalik [7] s'écrit :

$$(26) \quad C_p(U) = C_{p1}(U) = \begin{cases} \frac{h}{T_a} \frac{U_{1,j,k}^{(n)} - U_{1,j,k}^{(n-1)}}{U_{2,j,k}^{(n)} - U_{1,j,k}^{(n)}} & , \text{ pour } 0 \leq C_{p1} \leq \frac{h}{T_a} \\ \frac{h}{T_a} & , \text{ pour } C_{p1} > \frac{h}{T_a} \\ 0 & , \text{ pour } C_{p1} < 0, \end{cases}$$

où U vaut respectivement u , v et w . Ainsi, le schéma de Lax-Wendroff nous donne

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{1,j,k}^{(n+1)} = u_{1,j,k}^{(n)} + C_p(u) \frac{T_a}{h} [u_{2,j,k}^{(n)} - u_{1,j,k}^{(n)}] + \\ \quad (C_p)^2(u) \frac{T_a^2}{2h^2} [u_{3,j,k}^{(n)} - 2u_{2,j,k}^{(n)} + u_{1,j,k}^{(n)}], \\ v_{1,j,k}^{(n+1)} = v_{1,j,k}^{(n)} + C_p(v) \frac{T_a}{h} [v_{2,j,k}^{(n)} - v_{1,j,k}^{(n)}] + \\ \quad C_p^2(v) \frac{T_a^2}{2h^2} [v_{3,j,k}^{(n)} - 2v_{2,j,k}^{(n)} + v_{1,j,k}^{(n)}], \\ w_{1,j,k}^{(n+1)} = w_{1,j,k}^{(n)} + C_p(w) \frac{T_a}{h} [w_{2,j,k}^{(n)} - w_{1,j,k}^{(n)}] + \\ \quad C_p^2(w) \frac{T_a^2}{2h^2} [w_{3,j,k}^{(n)} - 2w_{2,j,k}^{(n)} + w_{1,j,k}^{(n)}]. \end{array} \right.$$

Pour la marée,

$$(28) \quad \zeta_{1,j}^{(n+1)} = \left(1 + \frac{cT_a}{h} + \frac{T_a}{T_f}\right)^{-1} \left[\left(\zeta_{1,j}^{(n)} + \frac{cT_a}{h} \zeta_{2,j}^{(n+1)} + \frac{T_a}{T_f} \eta^{(n+1)} \right) + T_a F_{1,j}^{(n)} \right],$$

où on rappelle que T_a est le pas de temps, T_f la période de marée et

$$(29) \quad F_{1,j}^{(n)} = \alpha_1 \cos\left[\frac{2\pi}{T}n + \beta_1(\cos\theta_1 + j \sin\theta_1)\right] + \alpha_2 \cos\left[\frac{2\pi}{T}n + \beta_2(-\cos\theta_2 + j \sin\theta_2)\right],$$

avec $T = \frac{L}{\sqrt{gH}}$.

-A la sortie du canal ($i = N$) :

$$(30) \quad C_p(U) = C_{p2}(U) = \begin{cases} \frac{T_a}{h} \frac{U_{N,j,k}^{(n-1)} - U_{N,j,k}^{(n)}}{U_{N,j,k}^{(n)} - U_{N-1,j,k}^{(n)}} , & \text{pour } 0 \leq C_{p2} \leq \frac{m}{s} \\ \frac{T_a}{h} , & \text{pour } C_{p2} > \frac{T_a}{h} \\ 0 , & \text{pour } C_{p2} < 0 , \end{cases}$$

et

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{N,j,k}^{(n+1)} = u_{N,j,k}^{(n)} + C_p(u) \frac{T_a}{h} \left[u_{N,j,k}^{(n)} - u_{N-1,j,k}^{(n)} \right] + \\ \quad (C_p)^2(u) \frac{T_a^2}{2h^2} \left[u_{N,j,k}^{(n)} - 2u_{N-1,j,k}^{(n)} + u_{N-2,j,k}^{(n)} \right] , \\ \\ v_{N,j,k}^{(n+1)} = v_{N,j,k}^{(n)} + C_p(v) \frac{T_a}{h} \left[v_{N,j,k}^{(n)} - v_{N-1,j,k}^{(n)} \right] + \\ \quad (C_p)^2(v) \frac{T_a^2}{2h^2} \left[v_{N,j,k}^{(n)} - 2v_{N-1,j,k}^{(n)} + v_{N-2,j,k}^{(n)} \right] , \\ \\ w_{N,j,k}^{(n+1)} = w_{N,j,k}^{(n)} + C_p(w) \frac{T_a}{h} \left[w_{N,j,k}^{(n)} - w_{N-1,j,k}^{(n)} \right] \\ \quad + (C_p)^2(w) \frac{T_a^2}{2h^2} \left[w_{N,j,k}^{(n)} - 2w_{N-1,j,k}^{(n)} + w_{N-2,j,k}^{(n)} \right] . \end{array} \right.$$

Pour la marée, on a :

$$(32) \quad \zeta_{N,j}^{(n+1)} = \left(1 + \frac{cT_a}{h} + \frac{T_a}{T_f} \right)^{-1} \left[\zeta_{N,j}^{(n)} + \frac{cT_a}{h} \zeta_{N-1,j}^{(n+1)} + \frac{T_a}{T_f} \eta^{(n+1)} \right] ,$$

$$(33) \quad \eta_{N,j}^{(n+1)} = A \cos\left(\frac{2\pi}{T_l} n\right) + B \cos\left(\frac{2\pi}{T_s} n\right).$$

7.3.3 Justification de l'utilisation d'un modèle linéaire plutôt que non linéaire

La question essentielle qui vient à l'esprit dans la simulation d'un modèle hydrodynamique est la suivante : est ce que l'écoulement dans le Canal est à prédominance linéaire ou/et non linéaire? Pour apporter une réponse à cette interrogation, nous pouvons par exemple faire une analyse dimensionnelle des équations. Mais avant de faire cette analyse, nous voudrions déjà anticiper pour dire que le modèle linéaire que nous avons testé numériquement nous donne quasiment les mêmes résultats que le modèle non linéaire précédent. Ce fait va être corroboré par l'analyse suivante :

on pose :

$$x = L\bar{x}, \quad y = l_c\bar{y}, \quad z = H\bar{z}, \quad t = T\bar{t}, \quad u = U_0\bar{u}, \quad v = V_0\bar{v}, \quad w = W_0\bar{w},$$

où \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , \bar{t} , \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} sont des grandeurs sans dimension d'ordre de grandeur de l'unité.

L'équation de continuité conduit alors à :

$$\frac{U_0}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_0}{l_c} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{W_0}{H} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0$$

Par principe de moindre dégénérescence, on a :

CHAPITRE 7. CONDITION DE RADIATION POUR LE CANAL DE VRIDI À ABIDJAN, CÔTE D'IVOIRE

$$\frac{W_0}{H} \sim \frac{V_0}{l_c}, \frac{W_0}{H} \sim \frac{U_0}{L} \text{ et donc } W_0 \sim \frac{H}{l_c} V_0 \text{ ou } W_0 \sim \frac{H}{L} U_0.$$

Comme $\frac{H}{l_c} \approx \frac{15}{370} \approx 0.04$ et $\frac{H}{L} = \frac{15}{2700} \approx 0.00556$, alors $W_0 \ll V_0$ et $W_0 \ll U_0$, et ainsi le courant horizontal est prédominant sur le courant vertical.

On a aussi $V_0 \approx \frac{l_c}{L} U_0 = \frac{370}{2700} U_0 \approx 1.37 \cdot 10^{-1} U_0$, ce qui montre que la direction moyenne principale du courant est celle de l'axe du canal.

L'équation de la quantité de mouvement devient aussi :

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{U_0^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{V_0 U_0}{l_c} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{W_0 U_0}{H} \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \\ 2\Omega \sin \lambda V_0 \bar{v} + \frac{g}{L} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\nu_h U_0}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\nu_h U_0}{l_c^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\nu_v U_0}{H^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \\ \frac{V_0}{T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{U_0 V_0}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{U_0^2}{l_c} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{W_0 V_0}{H} \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \\ 2\Omega \sin \lambda U_0 \bar{u} + \frac{g}{l_c} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\nu_h V_0}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\nu_h V_0}{l_c^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\nu_v V_0}{H^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Dans le canal, U_0 varie entre 0.5 m/s et 1.3 m/s et $T = \frac{L}{\sqrt{gH}} \simeq 220.45$ secondes

En comparant $\frac{1}{T}$ et $\frac{U_0}{L}$, on voit que $\frac{1}{T} \simeq \frac{1}{220} \text{ s}^{-1}$, alors que $\frac{U_0}{L}$ est compris entre $\frac{5.10^{-2}}{270} \text{ s}^{-1}$ et $\frac{1.3 \times 10^{-1}}{270} \text{ s}^{-1}$. Il apparaît alors clairement que les termes non linéaires peuvent être négligés dans les équations dynamiques sans que les résultats de la simulation n'en souffrent vraiment, ce qui confirme le fait que la simulation des équations rendues linéaires par abandon des termes non linéaires conduise quasiment aux mêmes résultats que ceux issus du modèle non linéaire initial.

7.3.4 Résultats de la simulation

Le test numérique nécessite des données (valeurs des paramètres, conditions initiales et aux limites). Nous rappelons les données numériques.

Selon les dimensions du canal :

longueur.....2700 m,
 largeur.....370 m,
 profondeur.....15 m.

Les conditions de stabilité imposent : $h = 180 \text{ m}$, $p = 74$, $q = 1$.

ν_h (viscosité turbulente horizontale).....0.001 m^2s^{-1} ,
 ν_v (viscosité turbulente verticale).....0.01 m^2s^{-1} ,
 α0.05,
 B_116.6,
 E_11.8,
 C_S (coefficient de friction du vent)0.025 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0.009 \\ \alpha_2 = 0.009 \\ \beta_1 = 1.25 \\ \beta_2 = 0.95 \\ \theta_1 = 20^\circ \\ \theta_2 = 0^\circ \\ A = 0.65 \\ B = 0.29 . \end{array} \right.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous désignons par "modèle1" notre modèle qui prend en compte le forçage complémentaire, et par "modèle2" celui de Blumberg et Kantha sans le forçage $F(t, x, y)$. Les résultats sont représentés par des courbes donnant l'évolution de la hauteur de marée sur 24 heures en un point proche de l'entrée du canal. La figure 2 montre sur le même graphique les hauteurs de marée données par les mesures et celles données par les "modèle1" et "modèle2". La figure 3 présente les erreurs relatives aux mesures calculées à partir des "modèle1 et 2".

Les résultats du test numérique montre qu'il y a mieux qu'une amélioration de l'estimation de la marée par la prise en compte du forçage complémentaire $F(t, x, y)$ à l'entrée (Mer) du canal. Les erreurs relatives n'excèdent point les 20% et sont même sur la grande partie du domaine de simulation inférieures à 10% en valeur absolue, alors qu'avec le "modèle2" les erreurs relatives excèdent les 50% (fig.3). Ceci est un résultat plus que remarquable et constitue une contribution essentielle à la modélisation de l'hydrodynamique du canal de Vridi. On peut remarquer la réduction considérable des écarts entre 2 heures et 5 heures et entre 14 heures et 22 heures.

Cependant, les écarts entre les mesures et notre modèle ("modèle1") bien que faibles peuvent être encore davantage amoindris. En effet, nos résultats ne tiennent pas compte du forçage engendré par les effets induits par le flux ou reflux complémentaire éventuel à la sortie du canal par le courant de la lagune, elle-même influencée par des fleuves, des rivières et des eaux de ruissellement représentant des flux mal maîtrisés à ce jour.

7.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé un forçage par superposition d'harmoniques prenant en compte l'influence de la marée et des flux complémentaires dûs aux eaux continentales dans les conditions de radiation à la frontière eau/eau d'un modèle hydrodynamique.

L'application au canal de Vridi montre une amélioration de l'estimation de l'élévation du niveau de l'eau, donc de la prédiction des hauteurs d'eau dans le canal. Les écarts entre les résultats du test numérique et les mesures découleraient de

la non prise en compte de l'apport de la lagune à la sortie du canal faute d'informations suffisantes.

Le forçage que nous proposons reste néanmoins un bon forçage qui donne de bons résultats avec moins de 10°/o par rapport aux mesures. Le modèle pourrait donc servir dans certains cas de base à des simulations dans certains systèmes fonctionnant comme une estuaire présentant une liaison estuaire/ mer par un canal étroit.

7.5 Bibliographie

[1] Blumberg A.F. & Mellor G.L. , Diagnostic and prognostic numerical circulation of the south atlantic, bight, Journal of geophysics research 88, (1983) p.4579 - 4592.

[2] Blumberg A.F. & Mellor G.L. , Description of a three dimensional coastal ocean model, Three-dimensional coastal ocean models, vol.118, N.S. Heaps Editor American, geophysical union, Washington D.C., (1987).

[3] Blumberg A.F. & Kantha L.H , Open boundary condition for circulation model. Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 111 n° 2, (1985), p, 237 - 255.

[4] Fisher H.B., List E.S., Imberger J. & Brouks N.M. , Mixing in inland and coastal waters , Academic Press inc, (1979).

[5] Knauss J.A. , Introduction to physical oceanography. Second edition, (1997).

[6] Konan N.A. , Modèle numérique pour simuler la pollution de la lagune Ebrié au niveau du canal de Vridi, Mémoire de DEA, Université de Cocody-Abidjan, (2003).

[7] Kowalik Z., Numerical modeling of ocean dynamics. World Scientific Publishing Co. , (1993).

[8] Ramany P.B. , Le système lagunaire Ebrié en Côte d'Ivoire. Environnement et salinité, Thèse de Docteur Ingénieur. (1979).

[9] Schlichting H. , Boundary layer theory , 6th edn, Mc Graw-Hill New York, (1968).

[10] Yanga K.K.S. , Calcul de courants et de hauteurs de marées dans la lagune. Résolution numérique des équations de St-Venant par la méthode des Eléments Finis, Mémoire de DEA, Université de Cocody-Abidjan, (2000).

[11] Zokagoa J.M., Amélioration des conditions aux limites libres dans un modèle hydrodynamique. Application au canal de Vridi, Mémoire de DEA, Université de Abidjan-Cocody, (2005)

CHAPITRE 7. CONDITION DE RADIATION POUR LE CANAL DE VRIDI À ABIDJAN, CÔTE D'IVOIRE

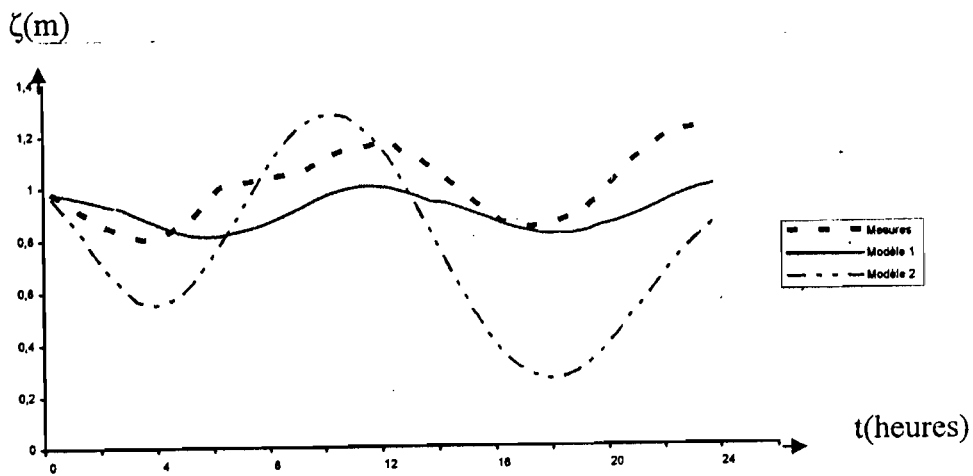


Figure 1, Courbes comparées des hauteurs de marée entre les mesures et les modèles

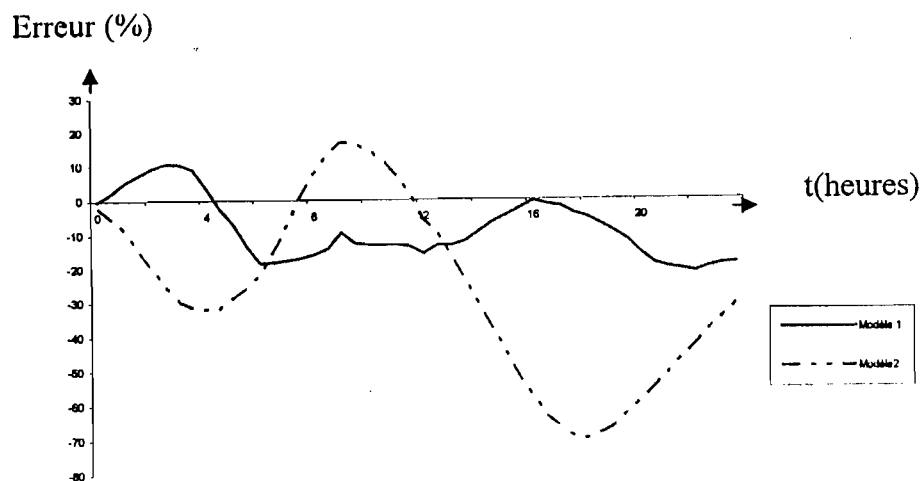
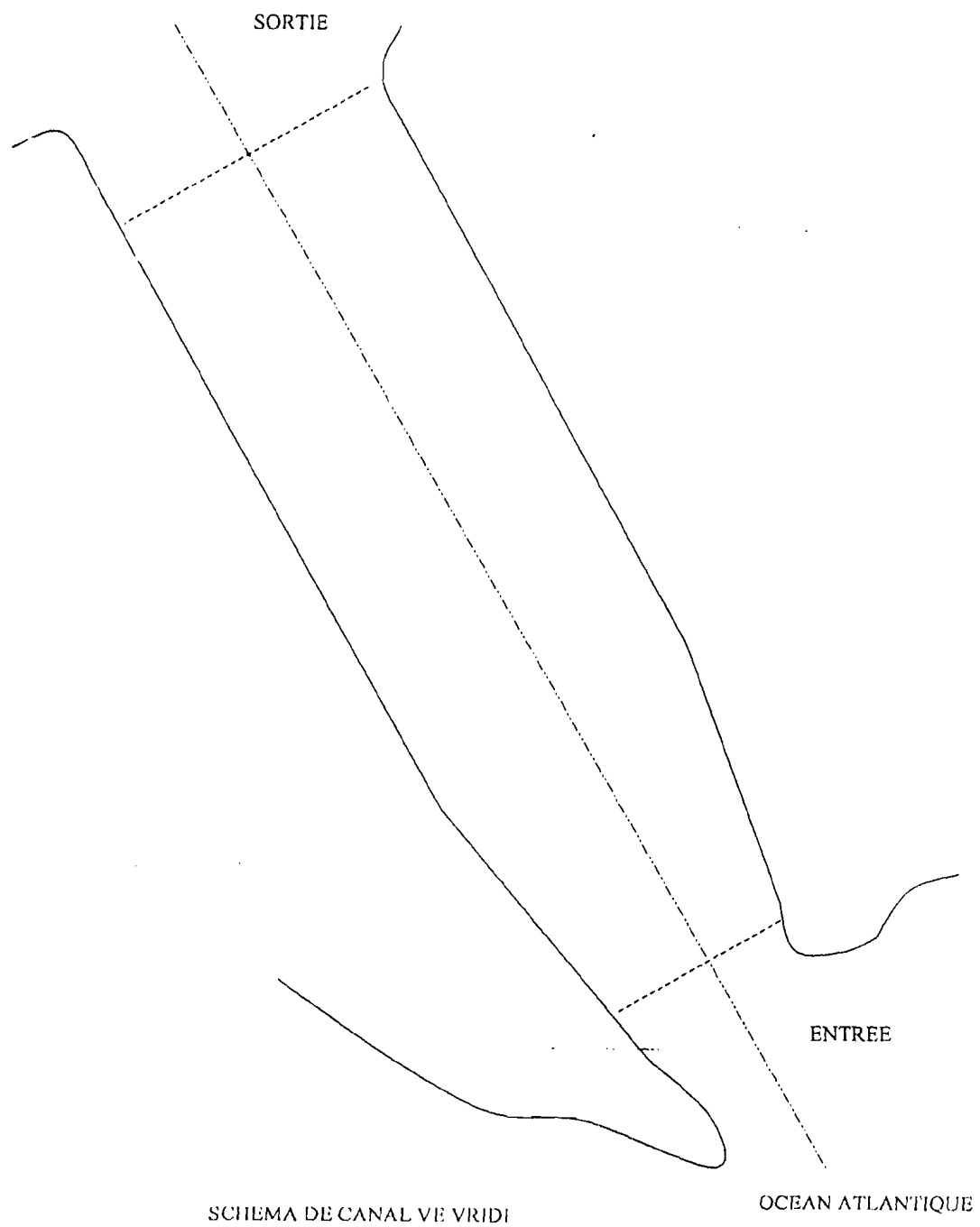


Figure 2, Courbes comparées des erreurs relatives

CHAPITRE 7. CONDITION DE RADIATION POUR LE CANAL DE VRIDI À ABIDJAN, CÔTE D'IVOIRE



Conclusion générale

Le travail que nous achevons, présente deux méthodes pour simuler les marées et les courants. Ces deux méthodes ont été testées sur le canal de Vridi à Abidjan.

La première méthode est basée sur la méthode des éléments finis. Le schéma numérique utilisé est celui de Runge-Kutta d'ordre 4 couplé avec le schéma de prédiction correction du même ordre. Les résultats obtenus à partir de cette simulation sont satisfaisants. L'étude comparative faite avec les mesures sur le terrain et les calculs montrent que les courbes de marées se confondent presque sur l'ensemble des trois noeuds tests considérés. L'erreur relative la plus grande ne dépasse pas 9%. Elle est même plus faible au noeud test situé loin des frontières ouvertes (elle varie entre 4% et 6%). Les calculs effectués en considérant les mesures de courants issues de différentes couches n'influent presque pas sur la qualité des résultats, l'erreur relative la plus grande étant toujours inférieure à 9%.

La superposition des courbes de marées obtenues à partir des mesures de courants dans les couches C1, C6 et C7, pour un même noeud dans le cas linéaire montre que les courbes se confondent quasiment et donnent l'allure d'une courbe unique.

Lorsque nous comparons les courbes obtenues dans les cas linéaire et non linéaire dans la couche C7, nous constatons que les courbes en un même noeud sont presque identiques. Les cas non linéaires traités ont aussi donné des résultats de marées pour lesquels l'erreur relative la plus grande est inférieure à 9%.

On peut donc dire avec les résultats donnés par cette première méthode, que la marée dans le canal, peut être prédite à partir de mesures de courants effectuées dans n'importe quelle couche avec une grande satisfaction; et que la non linéarité des équations qui régissent l'écoulement dans le canal de Vridi n'influe pas vraiment sur la marée.

Les résultats donnés par le calcul de la marée sont satisfaisants. Cependant, on pourrait encore les améliorer, si l'on connaissait avec beaucoup plus de précision la zone d'influence de chaque marégraphe installé le long du canal. Ces résultats intéressants que nous avons, sont dus au fait qu'au niveau des marées, nous avons une base de données importante sur presque tout le canal; ce qui nous a permis d'avoir de bonnes conditions aux limites et conditions initiales.

On peut donc dire que le modèle hydrodynamique que nous présentons ici, est adapté pour la simulation des marées dans la lagune.

En ce qui concerne la simulation des courants, nous avons observé des erreurs relatives de l'ordre de 50% et au-delà parfois. Ces erreurs pourraient être dues à l'approximation faite sur les conditions aux limites et les conditions initiales. Au fait, compte tenu du manque de données au niveau des courants, les mesures à notre disposition et qui ont été faites en un seul endroit, ont été utilisées sur l'ensemble du domaine comme conditions initiales et comme conditions aux limites. Cette approximation est une erreur de départ, qui pourrait avoir une certaine influence sur

les résultats. Cependant, ces erreurs de plus de 50% parfois bien que non négligeables, n'annulent pas les résultats intéressants obtenus. En effet, la comparaison des courbes obtenues à partir des normes des courants calculés et des courants mesurés nous indiquent que la norme de la vitesse est plus grande pendant le reflux que durant le flot. Cela s'observe tant au niveau des mesures qu'au niveau des calculs. Aussi, il a été observé que les directions des courants calculés nous donnent des résultats semblables à ceux donnés par les mesures dans le cas linéaire la plupart du temps.

Signalons au passage que des valeurs de mesures et de calculs du même ordre de grandeurs peuvent donner de telles erreurs relatives.

Les résultats sont beaucoup plus significatifs dans les cas linéaires que dans les cas non linéaires. Les cas linéaires, même si nous ne disposons pas de mesures aux autres noeuds tests pour tirer des conclusions plus poussées sur les directions des courants en ces noeuds, nous indiquent qu'il y a tantôt écoulement de la mer vers la lagune tantôt de la lagune vers la mer. En plus, pour le noeud 205 où les mesures sont faites, les calculs dans le cas linéaire montrent qu'il y a écoulement en permanence vers la mer. Il en est de même pour les mesures dans toutes les couches étudiées en ce noeud, sauf qu'au moment du flot dans la couche C6 (couche la plus basse), il y a des courants qui sont dirigés vers la lagune. Cet écoulement en permanence vers la mer en surface et vers la lagune au fond en ce noeud 205, fait penser à l'existence d'un tourbillon en permanence au voisinage de ce point. Dans le cas non linéaire, on observe que l'écoulement se fait principalement vers la lagune. Nous observons au moment du flot au niveau des noeuds situés à l'entrée et à la sortie qu'il y a de faibles courants qui sont dirigés vers la mer. Ce qui est contraire aux résultats donnés par les mesures. Ce qui montre que le modèle non linéaire ne simule pas bien les régimes des courants.

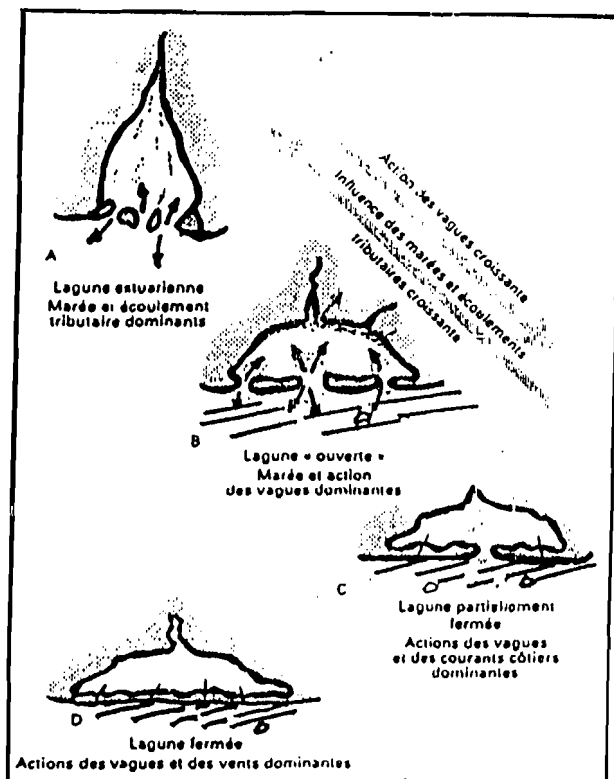
Dans la seconde partie, nous traitons les problèmes délicats de conditions aux limites aux frontières ouvertes ; par les conditions de radiations. Un forçage traduisant l'influence des fluctuations de courants lagunaires et de la marée sur l'élévation de la hauteur d'eau dans le canal est prise en compte dans le modèle. La simulation numérique par la méthode des différences finies a donné des résultats satisfaisants au niveau des marées calculées. Les erreurs relatives obtenues par rapport aux mesures ne dépassent pas 10%. Les résultats issus de ces travaux ont fait l'objet d'une publication [21].

Il faut signaler que les deux méthodes ne diffèrent que par le traitement des conditions aux limites. Dans le cas des différences finies, il a fallu faire un modèle pour simuler les conditions aux frontières libres, alors que pour la méthode des éléments finis, il a fallu tout simplement imposer $\delta\eta = 0$ ($\delta\eta$ étant la variation de l'élévation de la surface libre). Cependant, il faut dans le cas des éléments finis trouver un maillage qui représente le mieux possible les contours et le domaine d'étude lui-même.

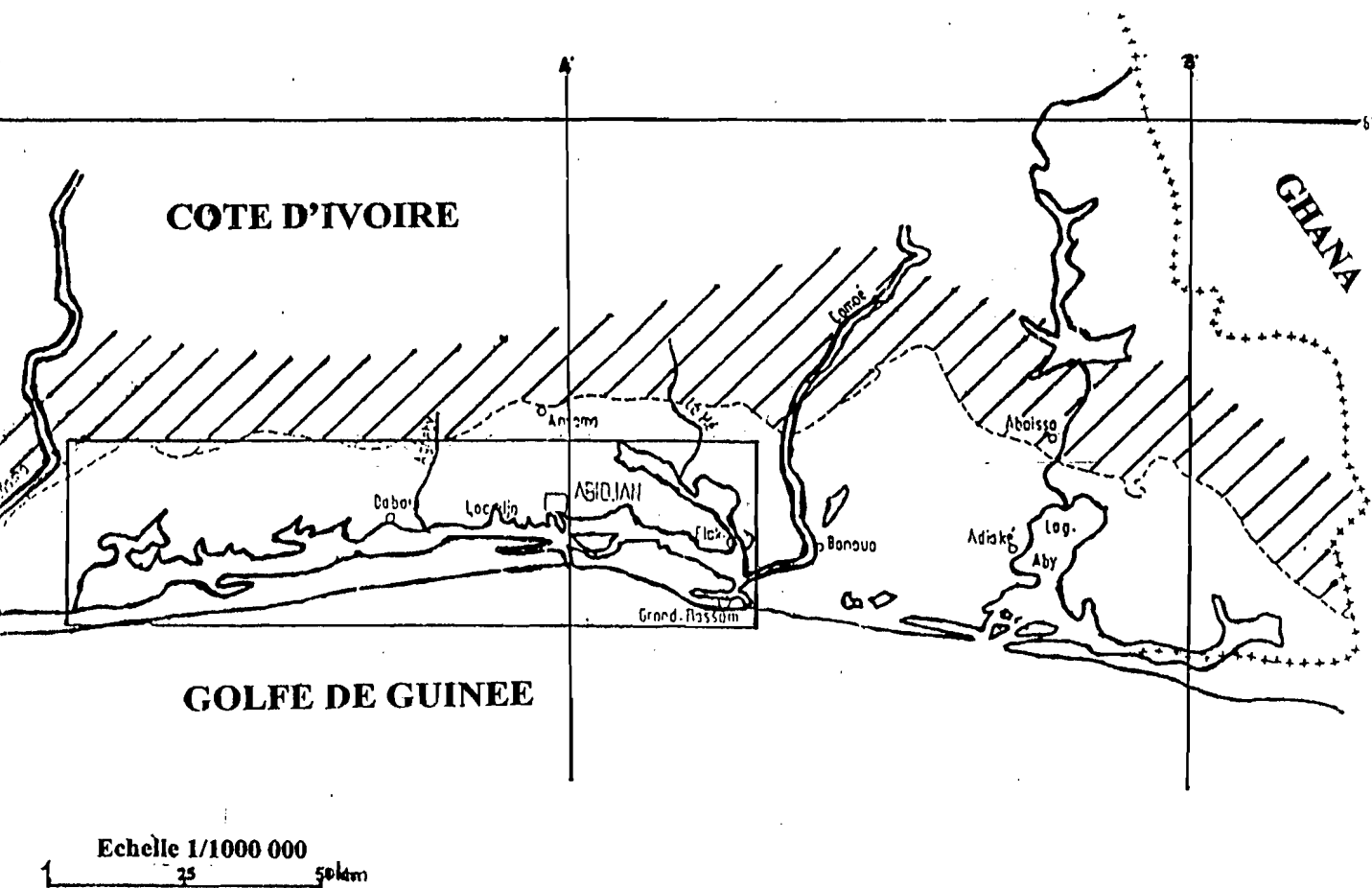
Pour avoir une connaissance parfaite de l'hydrodynamique de la lagune et de la qualité des eaux, les études ultérieures doivent permettre de mettre en place une banque de données fiable et suffisante sur les marées et les courants ; et étendre l'étude à tout le système Ebrié en prenant en compte les effets de la sédimentation, de l'érosion des fonds et aussi de la salinité dans la lagune compte tenu de l'influence des eaux marines. Le modèle que nous avons mis en place pourra servir de base aux modèles futurs du fait des résultats intéressants qu'il nous donne.

ANNEXES

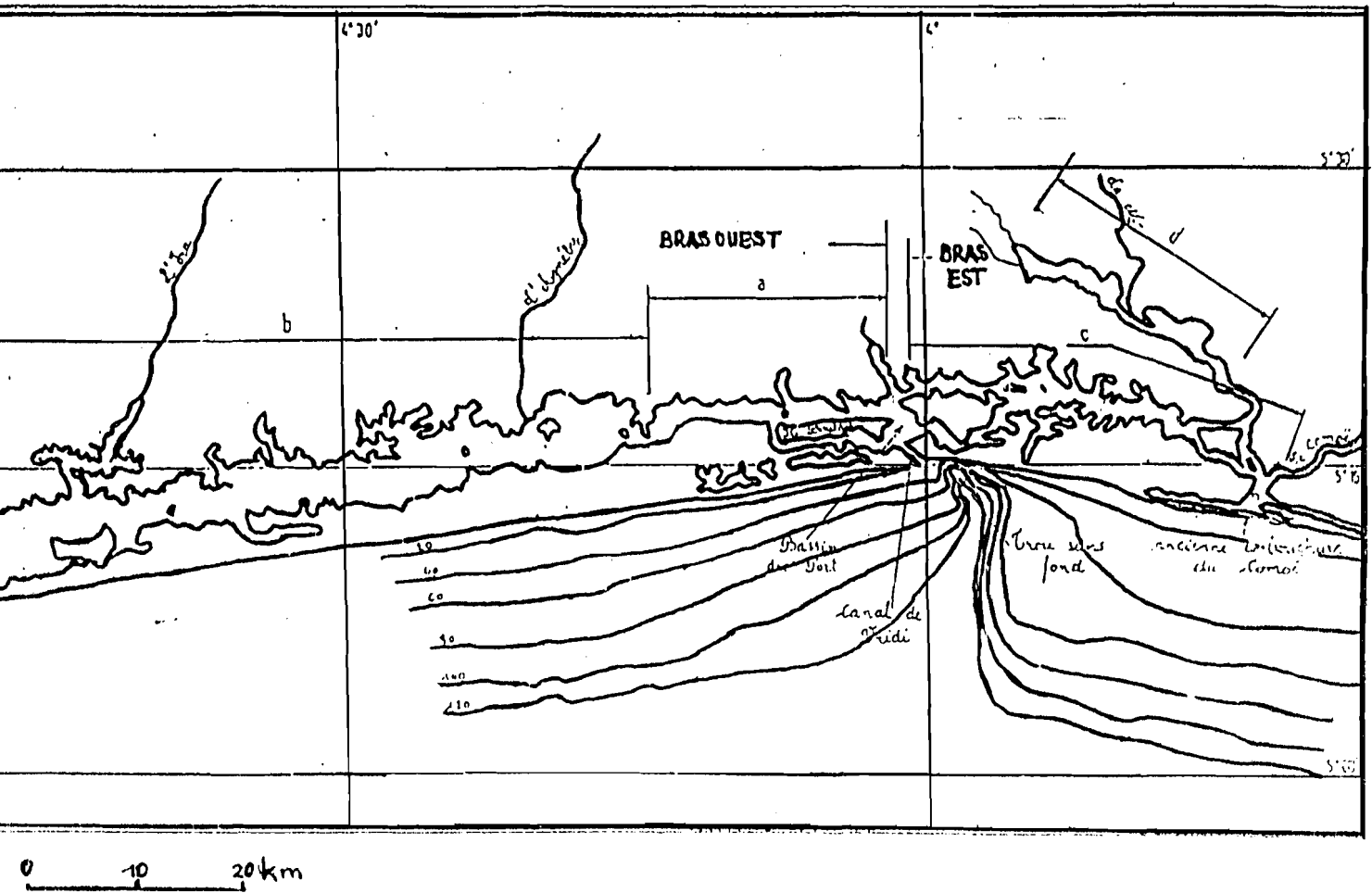
Annexe 1 : Différents types de lagunes



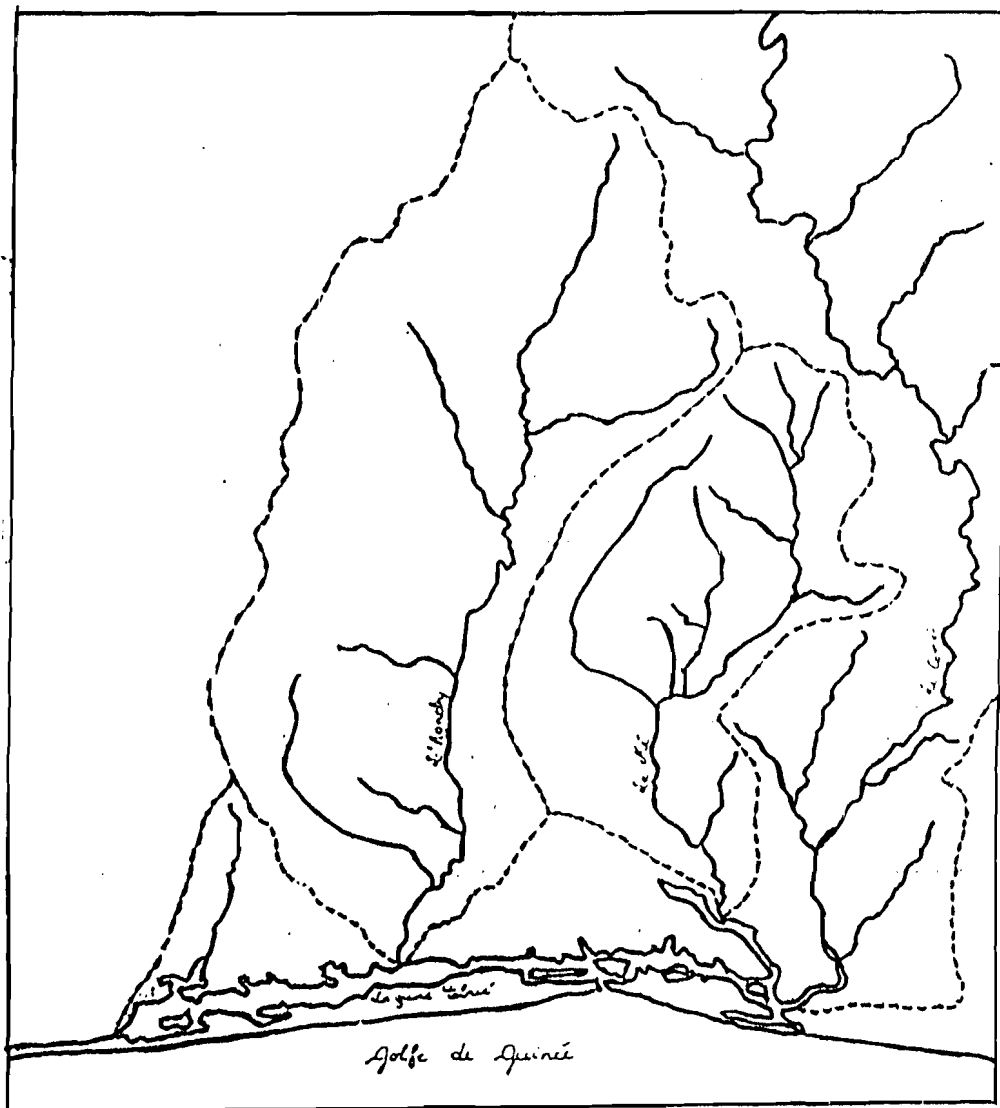
Annexe 2 : Figure présentant le système lagunaire Ebrié



Annexe 3 : Figure descriptive des différentes parties du système Ebrié



Annexe 4 : Figure montrant les bassins versants de la lagune Ebrié



Bibliographie

- [1] **A. ADOU** (1973) : Etude hydrologique du continental terminal de la région d'Abidjan. Connaissance acquise partie I : texte, Sodemi, rapport n°288.
- [2] **K. AFFIAN** (2003) : Approche environnementale d'un écosystème lagunaire microtidal (la lagune Ebrié en Côte d'Ivoire), par des études géochimiques, Bathymétriques et hydrologiques : contribution du S.I.G ; et de la télédétection, Thèse de Doctorat ès Sciences Naturelles de l'Université de Cocody-Abidjan.
- [3] **A. ALOSIUS** (1976) : Port Autonome d'Abidjan, 23 juillet 1950- 23 juillet 1975.
- [4] **A. YOSHIKAWA, W. W. LIOU, N. YOKOI and T.-H. SHIH** (1997) : Modeling of compressible effects on the Reynolds stress using a Morkovianized two-scale method, American institute of physics [s1070-6631(97)01710-8].
- [5] **R. ARFI, O. PEZENNEC, S. CISSOKO et M. MENSAH** (1993) : Evolution spatio-temporelle d'un indice caractérisant l'intensité de la résurgence ivoiro-ghanéenne. In : P. Le Loeuff, E. Marchal, J. P. Amon Kothias (éd;), Environnement et ressources aquatiques de Côte d'Ivoire. I- Le milieu marin. Paris, Orstom : 111-112.
- [6] **J. P. BENQUE, M. CAZENAVE et J. P. MALHERBE** (1976) : La mécanique des fluides et l'environnement. Prévision et maîtrise de la qualité de l'eau et de l'air. Compte rendu des quatorzièmes journées de l'hydraulique, pp 1-4, Question V, rapport 1.
- [7] **F. BOULOT, J. P. BENQUE et PAROT** (1976) : La mécanique des fluides et l'environnement. Prévision et maîtrise de la qualité de l'eau et de l'air. Compte rendu des quatorzièmes journées de l'hydraulique, pp 1-6, Question 2, rapport 3.
- [8] **F. BOULOT et L. PERNECKER** (1976) : La mécanique des fluides et l'environnement. Prévision et maîtrise de la qualité de l'eau et de l'air. Compte rendu des quatorzièmes journées de l'hydraulique, pp 1-9, Question VIb, rapport 1.
- [9] **F. A. BLUMBERG & H. L. KANTHA** (1985) : Open boundary condition for circulation model. Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 111 n°2, p, 237-255.

BIBLIOGRAPHIE

- [10] **BOWEN** (1969) : Rip current, I, theoretical investigations, *J. Geophys Res.* : 5467-5478.
- [11] **M. O. BRISTEAU, B. COUSSIN** (2001) : Boundary conditions for the shallow water equations solved by kinetic schemes, *Rapport de Recherche n°4282* - Octobre 2001 - 28p.
- [12] **M. CHIANG** (1994) : The applied dynamics of ocean surfaces waves, *Advance Sciences on Ocean Engineering* volume 1.
- [13] **P. CARLES** (1999) : Thermodynamique et Thermophysique des milieux fluides, cours de DEA au Laboratoire de Mécanique et Energétique de l'Université de Cocody (Abidjan).
- [14] **M. CAZENAVE, A. WARLUZEL et O. DAUBERT** (1976) : La mécanique des fluides et l'environnement. Prévision et maîtrise de la qualité de l'eau et l'air. *Compte rendu des quatorzièmes journées de l'hydraulique*, pp 1-6, Question 2, rapport 1.
- [15] **E. DANHO** (1998) : Mécanique et thermodynamique des milieux continus, cours de DEA au Laboratoire de Mécanique et Energétique de l'Université de Cocody (Abidjan).
- [16] **E. DANHO** (1998) : Turbulence pleinement développée, cours de DEA au Laboratoire de Mécanique et Energétique de l'Université de Cocody (Abidjan).
- [17] **E. DANHO, S. BERETE et S.G. ZADY** (2000) : Calcul du champ des vitesses dans la couche limite d'une houle de Stokes, rapport Aire Développement (Programme d'Etude sur le Génie Côtier) au Laboratoire de Mécanique et Energétique de l'Université de Cocody.
- [18] **E. DANHO et C.R. KOUAME** (2002) : Effets d'intermittence dans un système frontal estuarien au cours des variations de marée, *Rev. iv. Sci. Tech.*, N°03, pp 89-111.
- [19] **E. DANHO et K. K. J. KOUAME** (2000) : Résolution numérique d'un problème d'ensablement d'un système frontal à une embouchure, rapport Aire Développement (Programme d'Etude sur le Génie Côtier) au Laboratoire de Mécanique et Energétique de l'Université de Cocody.
- [20] **E. DANHO et F.G. ZEGBE** (2000) : Résolution numérique des équations de transport et d'accumulation de sédiments dans le canal de Vridi, rapport Aire Développement (Programme d'Etude sur le Génie Côtier) au Laboratoire de Mécanique et Energétique de l'Université de Cocody.
- [21] **E. DANHO, S. K. K. YANGA, J. M. ZOKAGOA, A. N. KONAN et R. N. DJUE** (2006) : Condition de radiation pour le canal de Vridi à Abidjan, Côte d'Ivoire, *Africa Matematica*, série 3, vol. 18, 2007.

BIBLIOGRAPHIE

- [22] **A. A. DIA** (1996) : Problème de la sédimentation dans les chenaux de navigation du Port Autonome d'Abidjan (cas du canal de Vridi), Mémoire de DEA à l'UFR des Sciences de la Terre de l'Université de Cocody-Abidjan.
- [23] **M. ELDIN** (1971) : Le milieu naturel de Côte d'Ivoire-Le Climat. Mémoire ORSTOM, n°50, Paris.
- [24] **D. EUVRARD** (1985) : Méthode numérique pour la mécanique (édition provisoire).
- [25] **L. M. FOMIN** (1964) : The dynamic method in oceanography, Elsevier oceanography series, Amsterdam, Oxford, New York.
- [26] **Y. GALLARDO** (1978) : Assymetry and anomalies of circulation and vertical mixing in the branching of lagoon-estuary. Hydrodynamics of estuaries and fjords. Elsevier, Oceanography Ser. 197-206.
- [27] **P. GERMAIN** (1986) : Mécanique X, tome 1&2, Ecole polytechnique collection ellipse.
- [28] **GRANT** (1974) : Bottom friction under waves in the presence of weak current, Tech. Mem. EKL-MESA. Thesis, départ. of civil engineering, Massachusetts Institute of technology.
- [29] **S. GUILLOU** (1996) : Modélisation des écoulements de fluides géophysiques, Thèse de Doctorat de l'Université de Caën.
- [30] **T. R. HAGEN, J. M. HJELMERVIK, A. LIE, J. R. NATIVIG, M. OFSTAD HENRIKSEN** (2005) : Visual simulation of shallow water waves, SNINTEF ICT, Applied Math, P. O. Box 124 Blindern, NO-0314 Oslo, Norway.
- [31] **D. J. HOLTSCHLAG and J. A. KOSCHIK** (2002) : A two-dimensional hydrodynamic model of the St-Clair-Detroit river waterway in the great lakes basin, Water Resources investigations Report 01-4236.
- [32] **M. G. JENKENS** (1998) : Developpement of a time-dependent Boussinesq model for nearshore hydrodynamique, Thèse des Universités M. S. et B. S. Atlantique de Floride.
- [33] **JONSSON** (1966) : Waves boundary layers and friction factor, Proc. 10th conf. costal eng. ASCE 127-148.
- [34] **W. KRAUSS** (1973) : Methods and results of theoretical oceanography I, Dynamics of the homogenous and the quasihomogenous ocean I.
- [35] **P.Y. LAGRE** (1998) : Ondes gravitationnelles avec et sans viscosité, cours de DEA au Laboratoire de Mécanique et Energétique de l'Université de Cocody (Abidjan).
- [36] **P. H. LeBLOND and Lawrence A. MYSAK** (1978) : Waves in the ocean, Elsevier oceanography series 20, Amsterdam, Oxford, New York.

BIBLIOGRAPHIE

- [37] **D. LEHAY** (1984) : Système lagunaire Ebrié (Abidjan, Côte d'Ivoire). Synthèse des données, modélisation de la courantométrie, dispersion. Mémoire de DEA Océanographie physique, Université de Brest, 111p.
- [38] **E. LISITZIN** (1974) : Sea levels changes, Elsevier oceanography series 8, Amsterdam, Oxford, New York.
- [39] **L. - HIGGINS** (1970) : Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, tome 1 & 2, J. Geophys.
- [40] **L.-S. HWANG and E. O. TUCK** (1970) : On the oscillation of harbours of arbitrary shape. J. Fluid Mech. vol. 42, partr 3, 447-464. printed in Great Britain. Article n°ec970306.
- [41] **A. MILITELLO** (1998) : hydrodynamics of wind-dominated, shallow embayments, Thèse de l'Institut de Technologie de floride.
- [42] **Z. LI and B. JOHNS** (1998) : A three dimensional numerical model of surface waves in the surf zone and longshore current generation over a plane beach. Estuarine, costal and shelf science 47,395-413. Article n°ec980382.
- [43] **P. LIGNELET** (1988) : Fortran 77- Le langage fortran, 4ième édition masson.
- [44] **S. ROBERTS, C. ZOPPOU** (2000) : Robust and efficient solution of the 2D shallow water equation with domains containing dry beds, ANZIAM J. 42 (E) ppC1260-C1282.
- [45] **A. R. ROBINSON** (1963) : Win driven ocean circulation, Blaidsdell publishing company, a division of random house, Inc. R.
- [46] **P.B. RAMANY** (1979) : Le système lagunaire Ebrié en Côte d'Ivoire. fonctionnement hydrodynamique et Salinité. Thèse de Docteur Ingénieur de l'Université d'Abidjan.
- [47] **R.-CHIAN, E.A. D'ASARO and G. T. DAIRIKI** (1998) : Langragian frequency spectra of vertical velocity and vorticity in High-Reynolds-Number oceanic turbulence. J. Fluid Mech., vol 362, pp177-198. Printed in the United Kingdom. cambridge university press.
- [48] **I.G. SHUKHMAN and M. SHULOV** (1997) : Effect of slight stratification on the nonlinear spatial evolution of a weakly unstable wave in a free shear layer, Fluid Mech., vol 343, pp 197-233. Printed in the Kingdom Cambridge Univerty press.
- [49] **K. M. SANGARE** de l'INHP (1998) : La méthode des éléments finis, cours de DEA de mécanique et énergétique, au Laboratoire de Mécanique et Énergétique de l'Université de Cocody (Abidjan).
- [50] **A. STERLING** : Livre de l'eau 2ième édition, vol 2, ouvrage rédigé à l'initiative de la CEBEDEU (Centre Belge d'Etude et de Documentation des Eaux, a.s.b.i.), pp237-264.

BIBLIOGRAPHIE

- [51] **J.P. TASTET** (1979) : Environnements sédimentaires et structuraux quaternaires du littoral du golfe de Guinée (Côte d'Ivoire, Bénin, Togo). Thèse de Docteur d'Etat, Université de Bordeaux I, n°621, vol 2, p181.
- [52] **J.P. TASTET** (1974) : L'environnement physique du système lagunaire Ebrié. Université d'Abidjan, Série Documentation, Département des Sciences de la Terre, n°11, 2t, 28p.
- [53] **J.P. TASTET** (1985) : Le littoral ivoirien : géologie, morphologie, dynamique, Ann. Univ. Nation. C. I, Série C., t. XXI-B : 189-218.
- [54] **F. VARLET** (1978) : Le régime de la lagune Ebrié (C.I) : Traits physiques essentiels. Travaux et Documents de L'ORSTOM, n°83, Paris, 162p.
- [55] **W. S. Von ARX**, Sc. D (1962) : An introduction to physical oceanography, Addison series in The earth sciences and it contribution, number 1245, from the Hole Oceanography Institution.
- [56] **Q. Y. ZHAN and K. Y. H. GIN** (2000) : Three-dimensional numerical simulation for tidal motion in Singapore's costal waters.
- [57] **M. ZHOU** (1998) : Influence of bottom stress on the two-layer flow induce by gravity currents in estuaries. Esturine, costal and shelf science 46,811-825.
- [58] **O. C. ZIENKEIVWIKC** (1979) : La méthode des éléments finis. Traduit de la 3ième édition anglaise.